Fysisch Laboratorium
Rijksuniversiteit Utrecht

TRILLINGEN

GOLVEN en OPTIKA

september 1973

TRILLINGEN, GOLVEN EN OPTICA

Dr. W.Snelleman

Inhoud

Trillingen

§ 1 Harmonische oscillator

§ 2 Twee gekoppelde oscillatoren

§ 3 Veel gekoppelde oscillatoren

Golven in een koord

§ 4 De golfvergelijking

§ 5 Algemene oplossing

§ 6 Kinematica en golfvorm

§ 7 Begin- en randvoorwaarden

§ 8 Harmonische golven

§ 9 Staande golven

§ 10 Oplossing door scheiding van variabelen

§ 11 Energie in lopende golven, Impedantie

§ 12 Energie in staande golven

§ 13 Reflectie en transmissie

Fourier theorie

§ 14 Fourier analyse

§ 15 Fourier transformatie

§ 16 Het convolutie theorema

§ 17 Fasesnelheid, groepssnelheid en dispersie

Andere voorbeelden

§ 18 De transmissielijn

§ 19 Golven in een membraam

§ 20 Interferentie van vlakke golven

Akoestische golven

§ 21 De golfvergelijking

§ 22 De geluidssnelheid

§ 23 Sferische golven

§ 24 Reflectie en breking

§ 25 Impedantie - aanpassing

§ 26 Potentiaalstroming

Electromagnetische golven

§ 27 De golfvergelijking
§ 28 Vlakke golven
§ 29 Polarisatie
§ 30 Energie in e.m. golven
§ 31 Golven in een geleider

Optica

§ 32 De buigingsformule
§ 33. Fraunhofer- en Fresnelbuiging
§ 34 Fraunhofer buiging
§ 35 Interferentie
§ 36 Coherentie
§ 37 Fresnel buiging
§ 38 Afbeeldingen en buiging
§ 39 Geometrische optica
§ 40 De laser.

Inleiding.

In dit college wordt aandacht besteed aan een type van verschijnselen, dat in vele gebieden van de fysica voorkomt. Hoewel de omstandigheden wisselen, zijn er een aantal basisbegrippen, die telkens weer optreden. Omwille van aanschouwelijkheid en inzicht worden de begrippen gedemonstreerd aan eenvoudige systemen als koord, staaf en luchtkolom, het belang blijft echter liggen bij begrippen als fase- en groepssnelheid, dispersie, Fourier-analyse, eigentoestanden, energietransport, impedantie, reflectie, etc.
In het tweede gedeelte van het college worden enige begrippen en toepassingen van de optica behandeld.

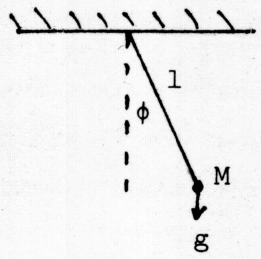
Literatuur:

W.C.Elmore and M.A.Heald, Physics of waves.
M.Alonso and E.J.Finn, University Physics, volume II.
D.H.Towne, Wave phenomena.
R.V.Sharman, Vibrations and waves.
F.S.Crawford, Berkeley Physics Course, volume 3, Waves.
H.J.Pain, Physics of vibrations and waves.
A.P.French, Vibrations and waves.
S.G.Lipson and H.Lipson, Optical Physics
G.R.Fowles, Introduction to Modern Optics
R.S.Longhurst, Geometrical and Physical Optics
R.T.Feynman, R.B.Leighton and M.Sands, The Feynman lectures on Physics Volume 1, Ch 26 t/m 36
M.Alonso and E.J.Finn, University Physics, Vol II, Ch 20 t/m 24
J.M.Stone, Radiation and Optics
J.W.Goodman, Introduction to Fourier Optics
M.Cagnet, M.Francon et J.C.Thrier, Atlas de phénomènes d'optique
M.Minnaert, Natuurkunde van het vrije veld.

1. De harmonische oscillator

(Zie Nauta, Klassieke Mechanica)

Voorbeeld 1: mechanische slinger



$$\text{Newton: } F = Ma = \frac{Mld^2\phi}{dt^2} = -Mg \sin\phi(t) \qquad (1,1)$$

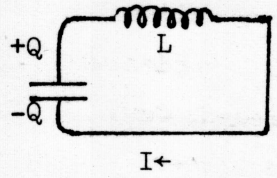
$$\sin\phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \ldots$$

dus geldt voor kleine ϕ: $Ml\,\frac{d^2\phi}{dt^2} = -Mg\,\phi(t)$ (1,2)

of, na deling door Ml: $\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega_o^2\,\phi$ met $\omega_o^2 = g/l$ (1,3)

Oplossing: $\phi(t) = \phi_o \cos(\omega t + \alpha)$ ω = eigen frekwentie (1,4)

Voorbeeld 2: LC-circuit



$$E = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{Q_1}{C} \qquad (1,5)$$

Met $\frac{dQ}{dt} = -I$ volgt na differentiëren: $L\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(+\frac{Q}{C}\right) = -\frac{I}{C}$

$$\text{of } \frac{d^2I}{dt^2} = -\omega_o^2 I \quad \text{met } \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \qquad (1,6)$$

Oplossing: $I(t) = I_o \cos(\omega_o t + \phi)$ (1,7)

ω^2 is steeds de terugdrijvende kracht per eenheid van 'massa' en per eenheid van 'uitwijking'. De analogie tussen mechanische en elektrische grootheden is massa m → zelfinduktie L

verplaatsing x → lading Q

veerkonstante → (kapaciteit C)$^{-1}$

Deze en uitgebreidere analogieën zijn nuttig voor het in elkaar 'vertalen' van bijv. elektrische, mechanische en akoestische modellen.

B. Lineariteit en superpositie

Wanneer alleen eerste machten van de functie en zijn afgeleiden in een differentiaal vergelijking voorkomen, heet hij lineair. De D.V. heet homogeen wanneer geen termen voorkomen, die onafhankelijk zijn van de functie en zijn afgeleiden.

Eigenschap van lineaire homogene D.V.: de som van twee oplossingen is ook een oplossing.

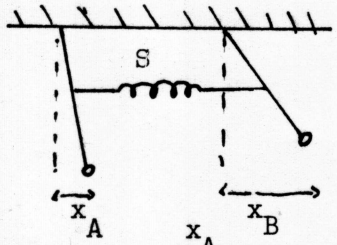
Eigenschap van lineaire inhomogene D.V.: De som van twee oplossingen van gelijke D.V.'s met twee "uitwendige termen" F_1 en F_2 is een oplossing van de D.V. met "uitwendige term" $F_1 + F_2$.

Deze eigenschappen behelzen het superpositieprincipe. Het geldt zowel voor een-dimensionale als voor meerdimensionale systemen, bijvoorbeeld een slinger, die zowel in de x- als in de y-richting kan bewegen.

2. Gekoppelde oscillatoren

Een systeem van twee gekoppelde harmonische oscillatoren voert in het algemeen een beweging uit, die gesplitst kan worden in twee harmonische trillingen: eigen trillingen (normal vibrations).

Voorbeeld 1: Twee identieke mathematische slingers, gekoppeld door een veer met veerkonstante S. De lengte van de veer in rust is gelijk aan de afstand van de massa's A en B in rust.
De bewegingsvergelijkingen zijn:



$$m\ddot{x}_A = -mg\frac{x_A}{l} - S(x_A - x_B) \qquad (2,1)$$

$$m\ddot{x}_B = -mg\frac{x_B}{l} + S(x_A - x_B) \qquad (2,2)$$

Door het kiezen van nieuwe koördinaten

$$X = x_A + x_B$$

$$Y = x_A - x_B \qquad (2,4)$$

en het optellen en aftrekken van de vergelijkingen (2,1) en (2,2) krijgt men twee nieuwe vergelijkingen

$$\ddot{X} + \omega_o^2 X = 0 \qquad (2,5)$$

$$\ddot{Y} + (\omega_o^2 + 2s/m)\, Y = 0 \qquad (2,6)$$

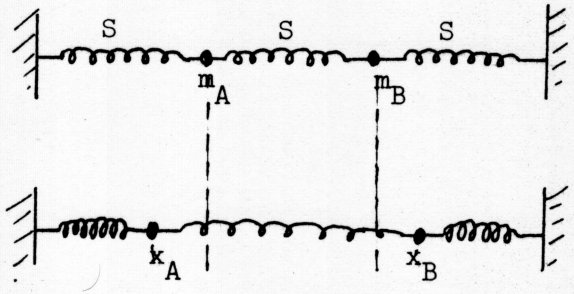
die niet meer gekoppeld zijn. De oplossing van elk is een harmonische beweging. De eigen frekwenties zijn

ω_o (zwaartepuntsbeweging) en

$(\omega^2_o + 2s/m)^{\frac{1}{2}}$ (zwaartepunt beweegt niet).

De energie, die in een eigen trilling aanwezig is, wordt niet overgedragen op een andere eigen trilling. Daarentegen wordt de energie van een oscillator wel overgedragen op een andere slinger.

Voorbeeld 2: Longitudinale trillingen van twee gelijke massa's, gekoppeld door drie gelijke veren.



De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$m\ddot{x}_A = - sx_A - s(x_A - x_B) \qquad (2,7)$$

$$m\ddot{x}_B = - sx_B + s(x_A - x_B) \qquad (2,8)$$

Optellen en aftrekken van (2,7) en (2,8) en de substituties

$X = x_A + x_B$ en $Y = x_A - x_B$

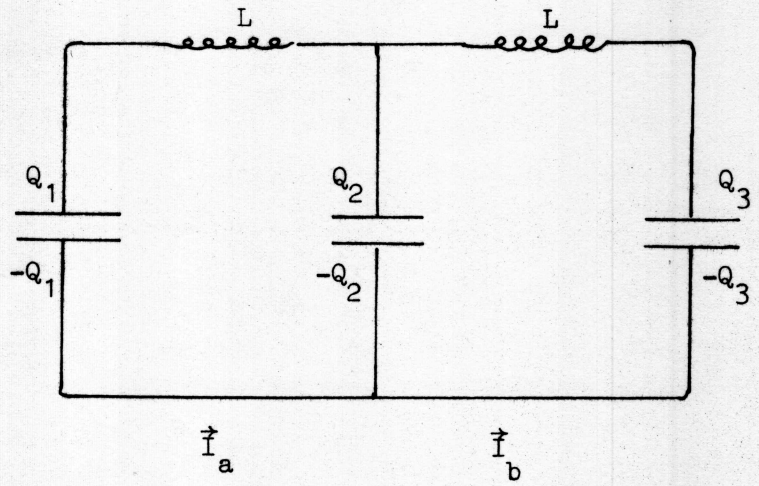
levert

$$\ddot{X} + \omega_1^2 X = 0 \qquad \omega_1^2 = \frac{s}{m} \qquad (2,9)$$

$$\ddot{Y} + \omega_2^2 Y = 0 \qquad \omega_2^2 = \frac{3s}{m} \qquad (2,10)$$

Voor transversale trillingen gelden analoge betrekkingen.

Voorbeeld 3: Twee gekoppelde LC-kringen



$$L\frac{dI_a}{dt} = \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{C} \qquad (2,11)$$

$$L\frac{dI_b}{dt} = \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_3}{C} \qquad (2,12)$$

Differentiatie en invullen van $\frac{dQ_1}{dt} = -I_a$,

$\frac{dQ_2}{dt} = I_a - I_b$ en $\frac{dQ_3}{dt} = I_b$ geeft:

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2} = -\frac{I_a}{C} + \frac{I_b - I_a}{C} \qquad (2,13)$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt} = -\frac{I_b}{C} - \frac{I_b - I_a}{C} \qquad (2,14)$$

Eigen trillingen kunnen weer op analoge wijze als in voorbeeld 2 gevonden worden. Daaruit volgen de eigen frekwenties

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{en} \qquad \omega_2^2 = \frac{3}{LC}$$

en de twee eigen trillingen

$$A_1(t) = A_1 \cos (\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$A_2(t) = A_2 \cos (\omega_2 t + \alpha_2)$$

Zwevingen en modulatie

De superpositie van twee trillingen met ongelijke frekwentie is een vaak voorkomend geval. Met de aanname dat amplitudes en fasekonstanten gelijk zijn, wordt de resultante:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \qquad (2,15)$$

We voeren nu in de gemiddelde frekwentie

$\omega_g = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ en de modulatiefrekwentie

$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$. (2,15) wordt dan

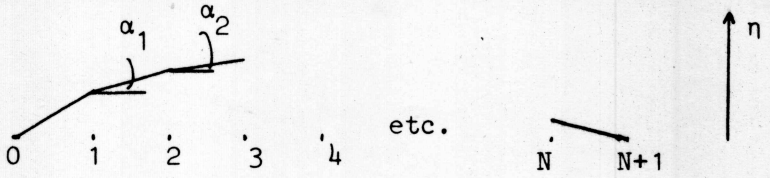
$$A(t) = 2A \cos \omega_g t \cos \omega_m t \qquad (2,16)$$

Als $\omega_1 \simeq \omega_2$ is $\omega_m << \omega_g$. De snelle trilling met frekwentie $\omega_g \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$ is dan gemoduleerd met een langzaam oscillerende trilling $2A \cos \omega_m t$.
Voorbeelden van zulke zwevingen: geluid van twee stemvorken van bijna gelijke frekwentie, licht van twee zeer weinig verschillende golflengten.
Van veel belang is ook de superpositie van een groot aantal trillingen in een beperkt frekwentiegebied (quasi-harmonische trillingen).

3. Veel gekoppelde oscillatoren.

Een uitbreiding van het voorgaande is het geval van N gekoppelde transversale oscillatoren, bijvoorbeeld N gelijke massa's, verbonden door gelijke veren.

De einden



0 en N + 1 zijn gefixeerd. Voor kleine uitwijkingen kan de spanning T in de veren constant genomen worden. De kracht op de p-de massa in de y-richting wordt gegeven door

$$F_p = - T \sin \alpha_{p-1} + T \sin \alpha_p \qquad (3,1)$$

Voor kleine hoeken is

$$\sin \alpha_{p-1} = \frac{\eta_p - \eta_{p-1}}{l} \qquad \text{en} \qquad \sin \alpha_p = \frac{\eta_{p+1} - \eta_p}{l}$$

Deze kracht geeft de versnelling aan de massa m_p, zodat

$$F = m \frac{d^2\eta}{dt^2} = - \frac{T}{l} (2\eta_p - \eta_{p+1} - \eta_{p-1}) \qquad (3,2)$$

of

$$\frac{d^2\eta_p}{dt^2} + 2\omega_o{}^2\eta_p - \omega_o{}^2(\eta_{p+1} + \eta_{p-1}) = 0 \quad \text{met} \quad \frac{T}{ml} = \omega_o{}^2 \qquad (3,3)$$

Uit dit stelsel van N differentiaalvergelijkingen zijn de amplitudes van de massapunten en de eigenfrekwenties te vinden (French, pag. 139; Pain, pag. 65.) Voor de amplitudes geldt

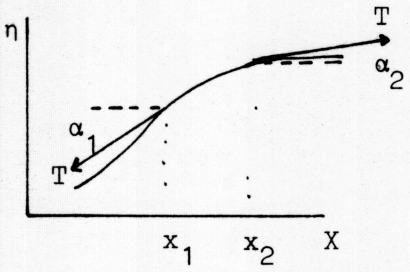
$$A_p = C \sin \frac{pn\pi}{N+1} \qquad n = 1,2,3 \ldots (N+1) \qquad (3,4)$$

en voor de eigenfrekwenties:

$$\omega_n = \omega_o \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \qquad n = 1,2,3 \ldots (N+1) \qquad (3,5)$$

4. Golven in een gespannen koord.
De één-dimensionale golfvergelijking.

Onderstellingen: de spanning T in het koord is onafhankelijk van x en neemt niet toe als het koord uit de evenwichtsstand is;



de hellingen, die in het koord ontstaan, zijn klein;
longitudinale bewegingen zijn verwaarloosbaar;
geen wrijving, geen stijfheid in het koord, geen zwaartekracht.

De kracht, die een element Δx ondervindt, wordt gegeven door

$$T(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \approx T(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = T\left(\frac{d\eta_2}{dx} - \frac{d\eta_1}{dx}\right) \qquad (4,1)$$

Met de 2e wet van Newton is:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial \eta_2}{dx} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right) \qquad (4,2)$$

waarin ρ de massa per lengteeenheid is.
Na deling door Δx en de limietovergang $\Delta x \to 0$ volgt:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

of

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}} \quad \text{met} \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \qquad (4,3)$$

c zal de golfsnelheid blijken te zijn.

5. Algemene oplossing van de golfvergelijking.

We schrijven de golfvergelijking als:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c \partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c \partial t}\right)\eta = 0 \qquad (5,1)$$

Voer in de nieuwe variabelen $u = x - ct$ en $v = x + ct$.
Er geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial v}$$

zodat (5,1) wordt

$$4\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = 0 \qquad (5,2)$$

met de oplossing:

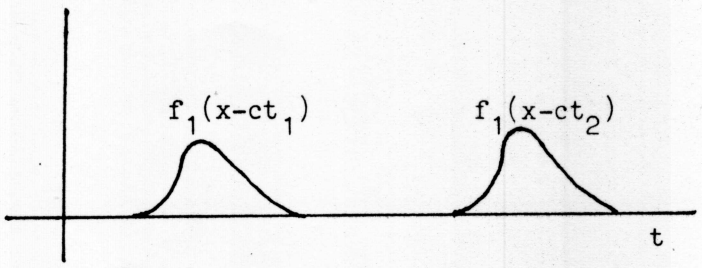
$$\eta(u,v) = f_1(u) + f_2(v)$$

waarin f_1 en f_2 twee geheel willekeurige, continue functies zijn. Substitueren van u en v geeft

$$\eta(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \qquad (5,3)$$

(algemene oplossing van d'Alembert)

f_1 en f_2 kunnen volgens het superpositie-principe opgebouwd gedacht worden uit een aantal andere, eenvoudige functies, indien dit van voordeel is. Hiervoor komen bijvoorbeeld sinus- en cosinusgolven van verschillende golflengte in aanmerking. De vorm van de oplossing van d'Alembert houdt daarbij in, dat de voortplantingssnelheid c voor alle golven gelijk is, ofwel, dat er geen dispersie optreedt. (We zullen ook golfvergelijkingen tegenkomen die niet in de d'Alembert-vorm te schrijven zijn en waar de golven dus wel dispersie vertonen).



In het geval van het koord plant een verstoring zich onvervormd voort. De functie $f_1(x - ct)$ stelt een verstoring voor die zich naar rechts voortplant, $f_2(x + ct)$ een verstoring, die zich naar links voortplant. Daar geldt, dat $f_1(x_1 - ct_1) = f_1(x_2 - ct_2)$ voor alle x_1, x_2, t_1 en t_2, waarvoor geldt $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$, is de constante c de voortplantings-

snelheid van de golf die, in verband met latere uitbreiding, de fasesnelheid van de golf wordt genoemd.

6. Kinematica en golfvorm.

Uit de golfvergelijking is inzicht te krijgen in de golfbeweging.
Nogmaals:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

De kromming van een koord is in goede benadering $\frac{d^2\eta}{dx^2}$.

Positieve versnelling $\overset{\leftarrow}{\rightarrow}$ kromming concaaf naar boven.

Negatieve versnelling $\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$ kromming concaaf naar beneden.

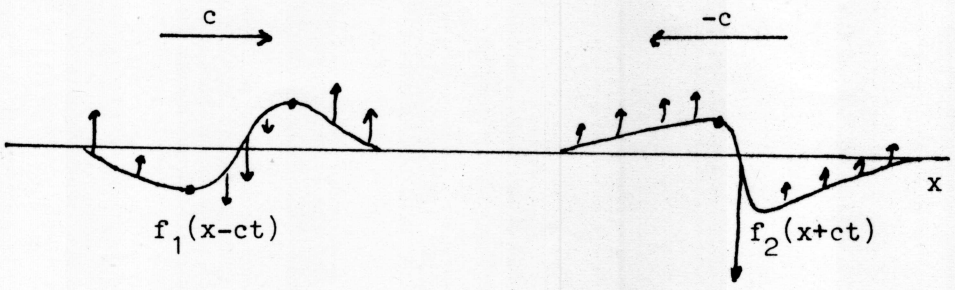
Geen versnelling in een buigpunt.

Beschouw f_1 en f_2 en de bijbehorende snelheden

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x - ct) = - c \frac{\partial}{\partial x} f_1(x - ct) \qquad \begin{cases} \text{neg. voor pos. helling} \\ \text{pos. voor neg. helling} \end{cases} \qquad (6,1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2(x + ct) = + c \frac{\partial}{\partial x} f_2(x + ct) \qquad \begin{cases} \text{neg. voor neg. helling} \\ \text{pos. voor pos. helling} \end{cases} \qquad (6,2)$$

De transversale snelheid is dus evenredig met de helling



In de toppen en dalen is de snelheid juist nul; hier keert de snelheid van teken om.

7. Begin- en randvoorwaarden.

Een tweede-orde gewone D.V. (bijv. harm. osc.) heeft oplossingen met twee constanten, die eenduidig bepaald zijn door de beginvoorwaarden van plaats en snelheid. Een tweede-orde partiële D.V. (bijv. koord) heeft oplossingen met twee willekeurige functies, die eenduidig bepaald zijn door de beginvoorwaarden van plaats en snelheid van alle deeltjes.

Wanneer de golfvergelijking niet het gehele interval $(-\infty, +\infty)$ beslaat, moeten randvoorwaarden opgelegd worden. Voor een vast uiteinde van een koord is dit bijvoorbeeld $\eta(o,t) = 0$, ofwel $f_2(o,t) = - f_1(o,t)$
De beginvoorwaarden zijn:

$$\eta(x,o) = \phi(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{7,1}$$

$$\left|\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=o} = \psi(x) = -cf_1'(x) + cf_2'(x) \tag{7,2}$$

$$\text{Voer in: } \chi(x) = \frac{1}{c}\int_o^x \psi(x')dx' \tag{7,3}$$

Dan worden de beginvoorwaarden:

$$\phi(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{7,4}$$

$$\chi(x) = -f_1(x) + f_2(x) + C \tag{7,5}$$

en dus

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}\{\phi(x) - \chi(x) + C\} \tag{7,6}$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}\{\phi(x) + \chi(x) - C\} \tag{7,7}$$

en de algemene oplossing

$$\eta(x,t) = \tfrac{1}{2}\{\phi(x-ct) + \phi(x+ct) - \chi(x-ct) + \chi(x+ct)\} \tag{7,8}$$

8. Harmonische golven.

Harmonische, d.i. sinus- en cosinusgolven nemen een vooraanstaande plaats in omdat:

1. Lineaire wiskundige operaties (zoals differentiaties, integratie, optelling), toegepast op harmonische functies, weer harmonische functies van dezelfde frequentie leveren.
2. Veel fysische systemen harmonische trillingen uitvoeren.
3. Harmonische functies een volledig stelsel functies vormen, waaruit een willekeurige periodieke en niet-periodieke functie, die aan ruime voorwaarden voldoet, kan worden samengesteld (Fourier-analyse).

Een harmonische golf is bijvoorbeeld

$$\eta = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct) \qquad (8,1)$$

wegens de periodiciteit van 2π is

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_1-ct) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2-ct) + 2\pi$$

of

$$x_2 - x_1 = \lambda \quad , \text{ de golflengte} \qquad (8,2)$$

De periode of trillingstijd is analoog te vinden: $T = t_2 - t_1 = \frac{\lambda}{c}$

De frequentie $\nu = \frac{1}{T}$ Vaak gebruikt men de hoekfrequentie $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Tenslotte wordt gebruikt het golfgetal k, het aantal golven per lengteeenheid, of vaker per 2π lengteeenheden:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (8,3)$$

De harmonische golf is dan te schrijven als $y = A\cos(kx - \omega t)$

De fasesnelheid is dan

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k} \qquad (8,4)$$

Complexe schrijfwijze:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \qquad (8,5)$$

met de afspraak, dat het reële gedeelte van de complexe grootheid de fysische grootheid beschrijft. De operatie "neem het reële deel" commuteert met differentiatie, integratie, optelling, maar niet met de vermenigvuldiging(zoals bijvoorbeeld optreedt bij energie berekeningen).

9. Staande golven.

Beschouw twee harmonische golven, die in tegengestelde richting lopen:

$$\eta_1 = A e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{en} \quad \eta_2 = A e^{i(kx+\omega t)}$$

Superpositie geeft:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A e^{ikx}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$$
$$= 2A\, e^{ikx} \cos\omega t \qquad (9,1)$$

als A reëel is.

Het reële deel is $\mathrm{Re}(\eta) = 2A \cos kx \cos\omega t$. (9,2)

De variabelen x en t komen hierin niet meer gekoppeld voor. De vormfactor coskx staat los van de tijdsfactor cosωt. We hebben hier te maken met staande golven: alle punten trillen in fase. Voor sommige punten (knopen) geldt steeds $\mathrm{Re}(\eta) = 0$ wegens coskx = o, andere punten (buiken) bereiken de extreme waarde $\mathrm{Re}(\eta) = \pm 2A$ wegens coskx = ± 1 op tijdstippen waarvoor cosωt = ± 1.

Men kan twee tegengesteld lopende, gelijke golven verkrijgen door terugkaatsing van de golf aan vaste uiteinden. Neemt men een koord bevestigd in x = o en x = l, dan zijn deze punten knopen en kunnen er slechts golven bestaan die voldoen aan

$$k_n = n\frac{\pi}{l} \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$

De resonantiefrequenties daarbij zijn

$$\omega_n = c\,k_n = n\frac{\pi c}{l} = n\,\omega_1$$

ω_1 is de grondfrequentie (fundamental); de frequenties van de andere eigentrillingen zijn de boventonen (harmonics). In een gesloten systeem bestaan dus eigentrillingen met discrete frequenties, bepaald door het systeem zelf.

10. Oplossing door scheiding van variabelen.

Een algemene methode voor het oplossen van de golfvergelijking, vooral voor staande golven, is het poneren van scheiding van variabelen:

$$\eta(x,t) = f(x)\cdot g(t) \qquad (10,1)$$

Substitueren in (4,3) geeft

$$\frac{c^2}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} \qquad (10,2)$$

Daar dit geldt voor alle waarden van x en t moeten beide zijden gelijk zijn aan een constante, te noemen (with a modest amount of foresight, Elmore and Heald) $-\omega^2$. We krijgen dan twee gewone D.V.'s:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

en

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \omega^2 g = 0$$

met de algemene oplossingen:

$$f(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad k = \omega/c$$

$$g(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

(A, B, C, D integratie constanten)

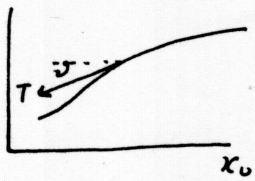
of $\eta(x,t) = a\sin kx\cos\omega t + b\sin kx\sin\omega t + c\cos kx\cos\omega t + d\cos kx\sin\omega t$ (10,3)

Voor een ingespannen koord (η = o voor x = o en x = 1) wordt dit (c = d = o wegens $\eta(o,t)$ = o en slechts bepaalde waarden van k toegelaten):

$$\eta(x,t) = \sin k_n x\,(a_n\cos\omega t + b_n\sin\omega t) \qquad (10,4)$$

II. Energie in een lopende golf.

We beschouwen een gespannen koord.



van links naar rechts is

De kracht, die het koord links van x_o uitoefent op het koord rechts van x_o is $F = -T\sin\vartheta = -T\frac{\partial\eta}{\partial x}$. De snelheid $V_y = \frac{\partial\eta}{\partial t}$, zodat het <u>energietransport</u> per sec.

$$P = F v_y = -T\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial t} \qquad (11,1)$$

De verhouding van kracht en snelheid is de <u>impedantie</u> van het koord

$$Z = F/v_y = -T\frac{\partial\eta/\partial x}{\partial\eta/\partial t} = T/c = \rho c = (\rho T)^{1/2} \qquad (11,2)$$

(zie (4,3))

Energietransport en impedantie zijn analoog aan elektrisch vermogen en impedantie, waarbij spanning en stroom in de plaats staan van kracht en

snelheid.

De <u>kinetische energie</u> in een elementje dx wordt gegeven door

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\rho \Delta x \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2$$

zodat de kinetische energiedichtheid is

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \qquad (11,3)$$

Potentiele energie is aanwezig in de snaar wegens de uitrekking. Deze is

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta x - \Delta x_0 \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \Delta x_0 - \Delta x_0 \\ &\approx \left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] \Delta x_0 - \Delta x_0 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \Delta x_0 \qquad (11,4)\end{aligned}$$

De verrichte arbeid is $V = \int T\,ds = \frac{1}{2}T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \Delta x$

en de dichtheid van de potentiele energie:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \tfrac{1}{2} T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \qquad (11,5)$$

Potentiele en kinetische energiedichtheid zijn dus <u>gelijk</u> en <u>in fase</u> op elk punt in de golf.

12. <u>Energie in een staande golf</u>.

Daar een staande golf opgebouwd is uit twee gelijke tegengesteld lopende golven, wordt geen energie getransporteerd.

Voor een staande golf $\eta = A \sin k_n x \sin \omega_n t$ is de kinetische energie

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\rho \omega_n^2 A^2 (\sin k_n x \cos \omega_n t)^2 \qquad (12,1)$$

en de potentiele energie

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \tfrac{1}{2} T k_n^2 A^2 (\cos k_n x \sin \omega_n t)^2 \qquad (12,2)$$

$\frac{\pi}{2}$ uit fase !

Voor een snaarsegment l tussen twee knopen is

$$K = \int_0^l \frac{dK}{dx}\,dx = \frac{1}{4}\, l\rho\omega^2 A^2 \cos^2\omega_n t \qquad (12,3)$$

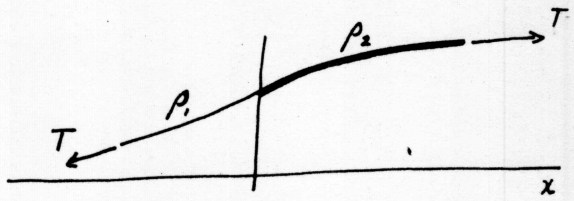
en $$V = \int_0^l \frac{dV}{dx}\,dx = \frac{1}{4}\, l T k^2 A^2 \sin^2\omega_n t \qquad (12,4)$$

en dus $$K + V = \frac{1}{4}\, l\rho\omega^2 A^2 \quad , \quad \text{daar } \rho\omega^2 = Tk^2$$

<u>constant in de tijd</u> (12,5)

13. <u>Reflectie en transmissie</u>.

Beschouw een koord bestaande uit een gedeelte met massadichtheid ρ_1, (voor $x < o$) en een gedeelte met massadichtheid ρ_2 (voor $x > o$).



De randvoorwaarden voor een golf in x = o zijn

$\eta_{links} = \eta_{rechts}$ en $\left(-T\frac{d\eta}{dx}\right)_{links} = \left(-T\frac{d\eta}{dx}\right)_{rechts}$

<u>Inkomende golf</u>: $\eta_1 = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)}$

<u>Doorlopende golf</u>: $\eta_2 = A_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}$ A_2 complex.

Om aan de randvoorwaarden te voldoen moet er een derde golf zijn, de <u>gereflecteerde</u>, van de vorm

$$\eta_3 = A_3\, e^{-i(k_1 x + \omega t)}$$

Randvoorwaarden: $$A_1 + A_3 = A_2 \qquad (13,1)$$

$$k_1 A_1 - k_1 A_3 = k_2 A_2 \qquad (13,2)$$

Hieruit volgt de <u>amplitude reflectie-coefficient</u>

$$R_A = \frac{A_3}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (13,3)$$

en de <u>amplitude transmissie coefficient</u>

$$T_a = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1+k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \qquad (13,4)$$

R_a en T_a zijn reëel, d.w.z. er treedt òf geen faseverschuiving op òf een fasesprong van π (als R_a negatief is).

Voor de vermogen-reflectie coefficient vindt men

$$R_p = \frac{\frac{1}{2}\rho_1 c_1 \omega^2 A_3^2}{\frac{1}{2}\rho_1 c_1 \omega^2 A_1^2} = \frac{A_3^2}{A_1^2} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad (13,5)$$

en voor de vermogen-transmissie coefficient

$$T_p = \frac{\frac{1}{2}\rho_2 c_2 \omega^2 A_2^2}{\frac{1}{2}\rho_1 c_1 \omega^2 A_1^2} = \frac{\rho_2 c_2 A_2^2}{\rho_1 c_1 A_1^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \qquad (13,6)$$

Energiebehoud wordt gedemonstreerd aan

$$R_p + T_p = 1 \qquad (13,7)$$

14 . Theorema van Fourier.

Een periodieke functie met golflengte λ is te schrijven als een som van sinus- en cosinustermen:

$$f(x) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2\pi x n}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2\pi x n}{\lambda} \qquad (14,1)$$

of, met behulp van de fasehoeken α_n als

$$f(x) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{2\pi x n}{\lambda} + \alpha_n\right) \qquad (14,2)$$

met

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{en} \quad \alpha_n = \text{arctg}\,(-B_n/A_n)$$

Met de complexe schrijfwijze wordt dit

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i x n/\lambda} \qquad (14,3)$$

met

$$A_o = a_o \quad , \quad A_n = a_n + a_{-n} \quad \text{en} \quad B_n = i(a_n - a_{-n}).$$

Met invoering van het golfgetal $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$

$$f(x) = \Sigma\, e^{ikx} . a_k \qquad (14,4)$$

De Fourier-analyse bestaat uit het vinden van de (complexe) coefficienten a_n. Daartoe vermenigvuldigen we f(x) met één van de basisfuncties $e^{2\pi i x m/\lambda}$ en

integreren over een interval, dat een geheel aantal golflengten van alle functies bevat, bijvoorbeeld $(-\lambda/2, +\lambda/2)$. Dan is de integraal:

$$I_m = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sum_{-s}^{s} e^{2\pi i x m/\lambda} \cdot a_n e^{2\pi i x n/\lambda} \, dx$$

$$= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sum a_n e^{2\pi i x (m+n)/\lambda} \, dx$$

$$= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} a_{-m} \, dx = a_{-m} \cdot \lambda \qquad (14,5)$$

Immers, de integralen strekken zich uit over een geheel aantal golflengten en zijn dus nul, behalve voor $m + n = 0$. We vinden de coëfficiënten als:

$$a_m = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{-2\pi i x m/\lambda} \, f(x) \, dx \qquad (14,6)$$

In het bizonder geldt voor $m = 0$:

$$a_o = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \, dx \qquad (14,7)$$

de gemiddelde waarde van $f(x)$.
Indien $f(x)$ even is, d.w.z. $f(x) = f(-x)$, geldt met $x = -x'$:

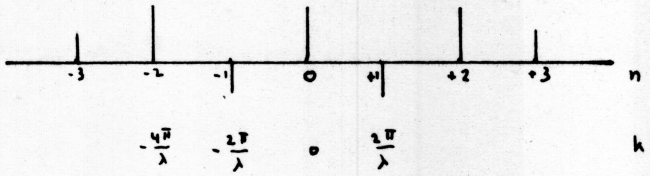
$$a_m = -\frac{1}{\lambda} \int_{+\lambda/2}^{-\lambda/2} e^{2\pi i x' m/\lambda} \, f(-x') \, dx'$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{2\pi i x' m/\lambda} \, f(x') \, dx'$$

$$= a_m^* \quad \text{en} \quad a_{-m} = a_m \qquad (14,8)$$

Dus zijn alle a_m reëel, ofwel: de reeks bevat alleen cosinustermen. Analoog: als $f(x) = -f(-x)$, dan is $a_m = -a_m^*$ en bevat de reeks alleen sinus-termen. De keuze van het nulpunt is dus van belang. We kiezen de eenvoudigste en beschouwen in het vervolg even functies.

Men kan a_n beschouwen als een functie van n met $a_n = 0$ als n niet geheel is.
Men kan ook in plaats van n het golfgetal $k = \frac{2\pi m}{\lambda}$ uitzetten.



De analyse van een periodiek signaal levert een discreet frequentie spectrum.

Voorbeelden

a. Een cosinus-functie $f(x) = A\left(e^{2\pi ix/\lambda} + e^{-2\pi ix/\lambda}\right)$

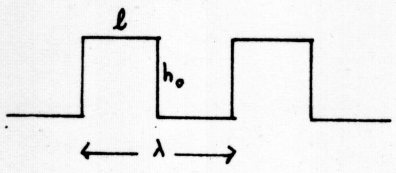
$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{-2\pi ixn/\lambda} A\left(e^{2\pi ix/\lambda} + e^{-2\pi ix/\lambda}\right) dx \qquad (14,9)$$

$= 0$ voor $n \neq \pm 1$

$= A$ voor $n = \pm 1$

Het frequentie spectrum bevat één piek bij $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ en één bij $k = -\frac{2\pi}{\lambda}$

b. Een symmetrische blokfunctie



$\ell = \lambda/2$

$f(x) = h_o$ voor $|x| < \ell/2 = \frac{\lambda}{4}$.

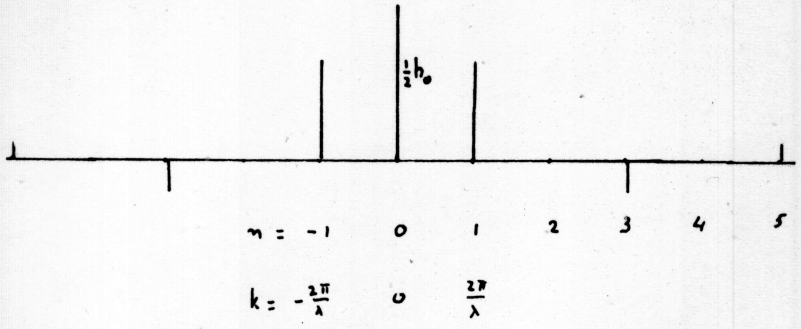
$f(x) = 0$ voor $\lambda/4 < |x| < \lambda/2$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{-2\pi ixn/\lambda} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-2\pi ixn/\lambda} h_o \, dx$$

$$= \frac{h_o}{\lambda} \frac{\lambda}{-2\pi in} e^{-2\pi ixn/\lambda} \Big|_{-\lambda/4}^{\lambda/4} = \frac{h_o}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} \qquad (14,10)$$

$n \neq 0$



$a_o = \frac{1}{2} h_o$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi} h_o$

$a_2 = a_{-2} = 0$

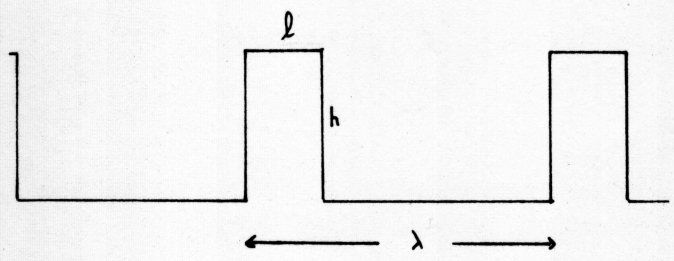
$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi} h_o$

$a_4 = a_{-4} = 0$

etc.

Het volgende voorbeeld dient om een brug te slaan naar een niet-periodieke functie.

c. Een asymmetrische blokfunctie.



Vergeleken met de vorige functies worden λ en h beide een factor b vergroot terwijl de lengte ℓ constant blijft.

$(h = \frac{1}{2}\lambda)$, $\ell = \frac{\lambda}{2b}$, $h = bh_o$

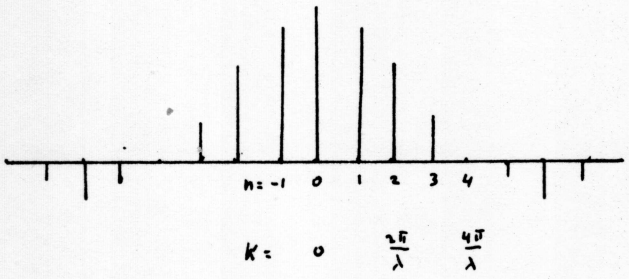
$f(x) = h$ voor $|x| < \ell/2 = \frac{\lambda}{4b}$

$f(x) = 0$ voor $\frac{\lambda}{4b} < |x| < \frac{\lambda}{2}$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/4b}^{\lambda/4b} e^{-2\pi i x n/\lambda}\, h\, dx$$

$$= \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2b} \qquad (14,11)$$

Voor b = 2 worden de a_n-waarden:



$$a_o = \frac{h}{2b} = \tfrac{1}{2} h_o$$

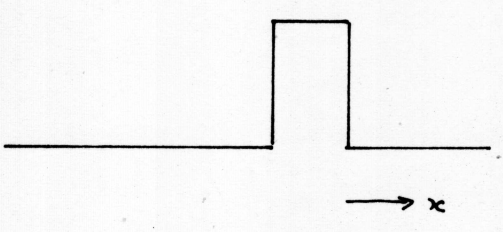
$$a_1 = a_{-1} = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} h_o$$

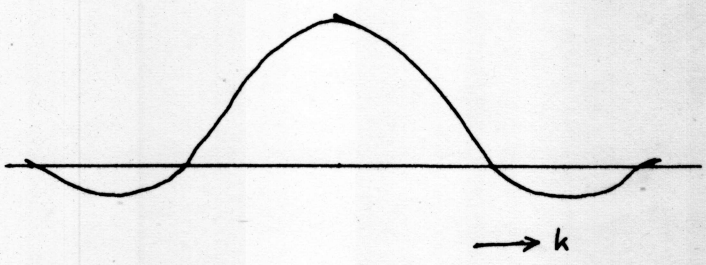
$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{\pi} h_o$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} h_o$$

$$a_4 = a_{-4} = 0$$

Vergeleken met voorbeeld b zijn de daar optredende componenten ook aanwezig (in dezelfde grootte), maar zijn er componenten tussen gekomen. Wanneer we λ onbeperkt laten toenemen zullen de componenten steeds dichter komen te liggen en in de limiet een continuefunctie vormen. We hebben dan de "getransformeerde" van een enkel bloksignaal:





15. De Fourier-transformatie. Niet-periodieke functies

Verg. luidde $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi}{\lambda} ixn}$

met $a(n) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} ixn}\, dx$

Ingevuld: $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{\frac{2\pi}{\lambda} ixn} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x')\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} ix'n}\, dx'$ (15,1)

Met gebruik van het golfgetal $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$ en de afstand tussen twee opvolgende golfgetallen $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda}$ wordt 15,1

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, \Delta k \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x')e^{-ikx'}\, dx' \qquad (15,2)$$

Bij vergroting van λ , nadert $\Delta k \to 0$, zodat in de limiet geldt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\, dx' \qquad (15,3)$$

of $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k)\, e^{ikx}\, dk \qquad (15,4)$$

met $$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \qquad (15,5)$$

Dit is de Fourier-transformatie, aangeduid met $\mathcal{F} f(x) = a(k)$.

Voorbeelden

a. Een blok met hoogte h en lengte ℓ.

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{-ikx} h\, dx =$$

$$= -\frac{h}{ik} e^{-ikx} \Big|_{-\ell/2}^{\ell/2}$$

$$= \frac{2h}{k} \sin \frac{k\ell}{2} \quad \text{(zie vorige voorbeeld)} \qquad (15,6)$$

b. Een blok met hoogte 2h en lengte $\ell/2$.
Er volgt:

$$a(k) = \frac{4h}{k} \sin \frac{k\ell}{4} \qquad (15,7)$$

Het patroon heeft dezelfde vorm gehouden, maar is in de breedte een factor 2 uitgerekt.

c. Een zeer smal, maar zeer hoog blok, met oppervlak $h \times \ell$. (In de limiet een δ-functie). De getransformeerde hiervan is de limiet van de uitrekking van het vorige voorbeeld, d.i. een horizontale rechte.

(De δ-functie is een hulpmiddel om een zeer smalle spleet, een zeer kort durende signaal, een puntvormige lichtbron, etc. te beschrijven.) Men beschrijft de δ-functie als

$$\int dx.\, f(x)\ \delta(x-x_o) = f(x_o) \qquad (15,8)$$

Een van de mogelijke definities is $\delta(x-x_o) = \lim_{\alpha=\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} .e^{-\alpha(x-x_o)^2}$ (15,9)

d. Een δ-functie in x_o : $f(x) = \delta(x-x_o) = \delta(x')$.
De getransformeerde is

$$\begin{aligned} a(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_o) e^{-ikx}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\ e^{-ik(x'+x_o)}\, dx' \\ &= e^{-ikx_o} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\ e^{-ikx'}\, dx' \\ &= e^{-ikx_o} \end{aligned} \qquad (15,10)$$

a(k) heeft dus nu een variabele fase gekregen, maar de absolute waarde blijft constant.

e. Twee δ-functies, symmetrisch om x = o. De F.T. is de som van de F.T.'s van de enkele δ-functies.

$$\begin{aligned} a_1(k) &= e^{-ikx_o} \\ a_2(k) &= e^{+ikx_o} \\ \hline \text{F.T} &= 2 \cos kx_o. \end{aligned} \qquad (15,11)$$

Dit is een reële even functie van k.

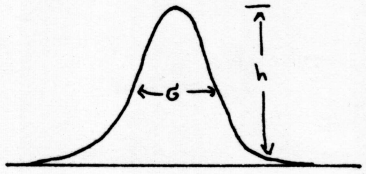
f. Veel δ-functies op regelmatige afstand a:

$$f(x) = \sum_n \delta(x-na)$$

$$F.T = \sum_{n=1}^{N} e^{-ikna} = \frac{1 - e^{-ikNa}}{1 - e^{-ika}} \qquad (15,12)$$

Voor grote N nadert dit tot een reeks van δ-functies bij $ka = 2\pi m$. (m geheel).

De Gauss-functie.



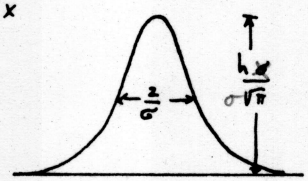
$$f(x) = he^{-x^2/\sigma^2}$$

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} he^{-x^2/\sigma^2} e^{-ikx} dx$$

$$= h\, e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2 - ikx + \frac{k^2\sigma^2}{4}} dx$$

$$= h\, e^{-\frac{k^2/\sigma^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x}{\sigma} + \frac{ik\sigma}{2})^2} dx}_{\sqrt{\pi}/\sigma}$$

$$= \frac{h\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}} \qquad (15,13)$$



weer een Gauss-functie.

In dit geval treden geen oscillaties op.

§16. Eigenschappen van de Fourier-transformatie

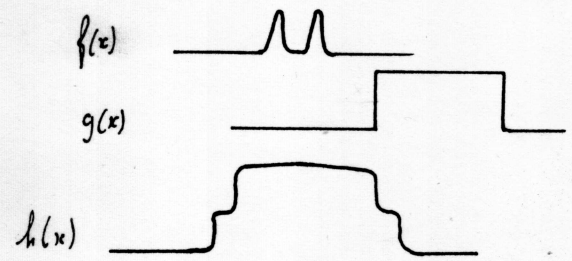
a. Lineariteit, zie voorbeeld ,2,e.

b. Convolutie theorema.

De convolutie h(x) van twee functies f(x) en g(x) is gegeven door:

$$h(x) = f(x) * g(x) \equiv \int_{-\sim}^{\sim} f(x')g(x-x')dx' \qquad (16,1)$$

Voorbeeld: Een spectrum f(x) bestaande uit twee spectraallijnen, beweegt over de (brede) uitbreedspleet g(x) van een monochromator. Het signaal als functie van de plaats van het spectrum t.o.v. de spleet is de convolutie van f(x) en g(x).



Het convolutietheorema luidt:

Zij $h(x) = f(x) * g(x)$ dan is

$$\mathcal{F}\, h(x) = \mathcal{F}_{f(x)} \,.\, \mathcal{F}_{g(x)} \qquad (16,2)$$

c. Autocorrelatie theorema.

De correlatiefunctie van twee functies f(x) en g(x) is gegeven door

$$k(x) = C\, f(x),g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'+x)dx' \qquad (16,3)$$

Het theorema luidt:

$$\mathcal{F} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')f^*(x'+x)dx' = |\mathcal{F} f(x)|^2 \qquad (16,4)$$

d. Inversie theorema.

$$\mathcal{F}\mathcal{F} f(x) = 2\pi f(x) \qquad (16,5)$$

e. Parseval theorema.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F} f(x)|^2 dk \qquad (16,6)$$

§ 17. Fasesnelheid en groepssnelheid, dispersie.

Bij de beschrijving van golven in een koord vonden we een golfvergelijking (4,3) waarvan de oplossing in de vorm van d'Alembert geschreven kon worden. Dit hield in, dat de golven onvervormd voortgeplant worden. Denkt men zich de golven ontleed in sinus golven (zie Fourier-analyse), dan bewegen dus al die golven met gelijke snelheid, de fasesnelheid.

Bij veel soorten golfbeweging is dit niet het geval. Alleen sinusgolven worden onvervormd voortgeplant, ingewikkelder golven worden vervormd, omdat de verschillende sinusgolven een verschillende voortplantingssnelheid hebben. We bekijken dit nader aan de hand van het voorbeeld van twee sinusgolven van gelijke amplitude, maar enigszins verschillende frequenties:

$$\eta_1 = \exp i\left[(k+\tfrac{1}{2}\Delta k)x - (\omega+\tfrac{1}{2}\Delta\omega)t \right] \qquad (17,1)$$

$$\eta_1 = \exp i\left[(k-\tfrac{1}{2}\Delta k)x - (\omega-\tfrac{1}{2}\Delta\omega)t \right] \qquad (17,2)$$

De gemiddelde fasesnelheid is $c_f = \frac{\omega}{k}$

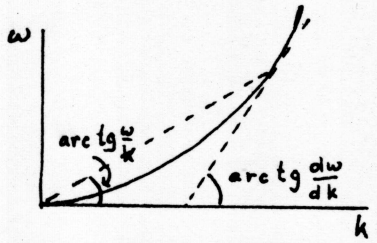
Superpositie geeft:

$$\eta = \{\exp\left[i(\tfrac{1}{2}\Delta kx - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t) \right] + \exp\left[-i(\tfrac{1}{2}\Delta kx - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t) \right]\}.\ e^{-i(kx-\omega t)}$$

Het reële gedeelte is:

$$\mathrm{Re}(\eta) = 2\cos(\tfrac{1}{2}\Delta kx - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t)\cos(kx-\omega t) \qquad (17,3)$$

De "snelle" factor heeft golfgetal k en frequentie ω, de"langzame" omhullende heeft golfgetal $\frac{\Delta k}{2}$ en frequentie $\frac{\Delta\omega}{2}$. Het patroon van de snelle factor heeft de voortplantingssnelheid $c_f = \frac{\omega}{k}$, de fasesnelheid, dat van de omhullende heeft een voortplantingssnelheid $c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$ in de limiet voor $\Delta k \rightarrow 0$.
Dit is de groepssnelheid.
Wanneer in een medium geen dispersie optreedt, is $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k}$; wanneer wel dispersie optreedt, kan uit het verband tussen ω en k, de dispersie vergelijking, de groepssnelheid gevonden worden.



In het geval van transversale golven in een staaf is de golfvergelijking

$$\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} = -\,a\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \qquad (17,4)$$

We kunnen door invullen nagaan, dat $\eta = e^{ikx}\,e^{i\omega t}$ een oplossing is als $k^4 = a\omega^2$ of als $\omega = k^2 a^{-\frac{1}{2}}$.
Hieruit volgt de fasesnelheid

$$c_f = \frac{\omega}{k} = ka^{-1/2} \qquad (17,5)$$

en de groepssnelheid

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 2ka^{-1/2} \qquad (17,6)$$

Doen we hetzelfde voor de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\frac{1}{c^2} \qquad (\ldots$$

dan vinden we, door het gelijk aantal malen differentiëren, een lineair verband tussen ω en k en dus gelijke waarden voor $\frac{\omega}{k}$ en $\frac{d\omega}{dk}$.
Voor het niet optreden van dispersie is dus de voorwaarde, dat de afgeleiden naar x en t van dezelfde orde zijn.
Voorbeeld: Groepssnelheid van een golfpakketje.
We beschouwen nu een golfpakketje, te beschrijven als

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k)\; e^{-i(kx-\omega t)}\,dk$$

$$\text{met } a(k) = e^{-(k-k_o)^2/2\sigma^2} \qquad (17,7)$$

Daar de bijdragen tot de integraal voornamelijk rond k_o liggen, ontwikkelen

we $(kx-\omega t)$ in een Taylor-reeks om k_o:

$$kx-\omega(k)t = k_o x-\omega_o t + (k-k_o)\,(x-\frac{d\omega}{dk}\,t) +... \qquad (17,8)$$

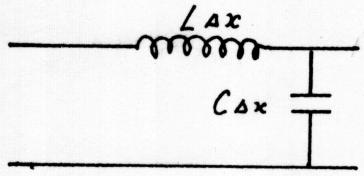
zodat

$$y(x,t) = e^{-i(k_o x-\omega_o t)} \int^{\sim} a(k) e^{-i(k-k_o)\,(x-\frac{d\omega}{dk}\,t)}\,dk \qquad (17,9)$$

De factor voor de integraal geeft de "draaggolf", de integraal zelf de omhullende weer. De voortplantingssnelheid van de omhullende is $\frac{d\omega}{dk}$, de groepssnelheid.

§ 18. <u>De transmissielijn</u>.

Als een ander voorbeeld van golfbeweging beschouwen we de voortplanting van electrische spanningen en stromen in een transmissielijn, bij voorbeeld een systeem van twee evenwijdige geleidende draden. We onderstellen de draden weerstandsloos, met capaciteit C en zelfinductie L, beide per lengte-eenheid. Een segment van de draden kan weergegeven worden door een LC-schakeling. Over



de einden van het segment staat een spanning $\frac{\partial V}{\partial x}\,\Delta x$, die gelijk is aan de spanningsval in de zelfinductie $L\Delta x$:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\Delta x = -\,L\Delta x\,\frac{\partial I}{\partial t}$$

of

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\,L\,\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (18,1)$$

De stroomverandering langs de draad is een gevolg van het opladen van de condensator $C\Delta x$:

$$-\,\frac{\partial I}{\partial x}\,\Delta x = C\Delta x\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

of

$$-\,\frac{\partial I}{\partial x} = C\,\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (18,2)$$

Door (18,1) naar x te differentiëren en (18,2) naar t, volgt, met $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L\,C\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (18,3)$$

Analoog volgt:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L\,C\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad (18,4)$$

In de transmissielijn lopen stroom- en spanningsgolven met snelheid $c = (LC)^{-1/2}$ (L en C gedefinieerd per lengte-eenheid).

Voor coaxiaal kabels is de zelfinductie:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad H$$

waarin μ de permeabiliteit van de tussenstof en r_1 en r_2 de stralen van de twee cylinders zijn.
De capaciteit is

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln r_2/r_1} \quad F$$

waarin ε de dielectrische constante is.
De voortplantingssnelheid is dus

$$c = (LC)^{-1/2} = (\mu\varepsilon)^{-1/2} \qquad (18,5)$$

slechts bepaald door de eigenschappen van het medium tussen de cylinders. Voor vacuum is c de lichtsnelheid.
Coaxiaal kabels worden o.a. gebruikt als "delay-line" om de aankomst van een signaal een bekend, klein tijdsinterval te vertragen.
Oplossingen van (18,3) en (18,4) zijn

$$V = V_o \cos(\omega t - kx) \qquad (18,6)$$

en

$$I = I_o \cos(\omega t - kx) \qquad (18,7)$$

Invullen in (18,1) en integratie levert voor de verhouding van V en I de impedantie:

$$Z = \frac{V}{I} = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} \qquad (18,8)$$

Voor de coaxiaalkabel zonder tussenstof is

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{1/2} \neq 377\ \Omega$$

Als de transmissielijn wordt beëindigd op $x = x_o$ en afgesloten met een impedantie $Z_o = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$, maakt dat voor de aankomende golven geen verschil. Ze worden geabsorbeerd in de weerstand, die dan "aangepast" is. Voor andere waarden van de weerstand (bij voorbeeld kortsluiting: $Z = 0$) treedt reflectie op, analoog aan het geval van het koord.

§ 19 Golven in een membraan.

Analoog aan de golven in een koord is voor een membraan, gekarakteriseerd door een oppervlaktespanning f per eenheid van lengte en een massa σ per eenheid van oppervlak een golfvergelijking op te stellen:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \qquad (19,1)$$

Onderstel, dat een oplossing bestaat van de vorm

$$\zeta(x,y,t) = X(x).Y(y).T(t). \qquad (19,2)$$

Invullen in (19,1) en delen door $XYTc^{-2}$ geeft

$$\frac{c^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{c^2}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2 \qquad (19,3)$$

dus

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad (19,4)$$

en

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = -k_x^2 \qquad (19,5)$$

(19,5) kan dan gesplitst worden in

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \qquad (19,6)$$

en

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \qquad (19,7)$$

met

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

De oplossingen van (19,4), (19,6) en (19,7) zijn o.a. harmonische functies, gegeven door

$$\zeta(x,y,t) = A\, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \qquad (19,8)$$

Voor punten (x,y) met gelijke fase ϕ geldt

$$k_x x_1 + k_y y_1 - \omega t_1 = \phi_1 \qquad (19,9)$$

Zo'n golffront is een rechte lijn in het xy vlak van het membraan. Gebruiken we de vectoren

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y \text{ en } \bar{k} = \bar{i}k_x + \bar{j}k_y$$

dan wordt (19,9)

$$\bar{k}.\bar{r}_1 = \phi_1 + \omega t_1 \qquad (19,10)$$

Het golffront bepaald door ϕ_1 op tijd t_1 is loodrecht op de golfvector $\bar{k}$. Vergroten van ϕ_1 met 2π geeft een identiek parallel golffront op een afstand gegeven door

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1).\bar{k} = \lambda k = 2\pi$$

waarin

$$k = |\bar{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} = \frac{\omega}{c}$$

k is dus het golfgetal en de vector $\bar{k}$ geeft de richting waarin de golf zich voortplant.

Kinetische en potentiële energie kunnen analoog aan het koord berekend worden.

Voor een rechthoekig membraan met zijden a en b verwachten we oplossingen

$$\zeta(x,y,t) = A \sin k_x x \sin k_y y \cos\omega t \qquad (19,11)$$

$$\text{met } k_x a = l\pi \qquad l = 1,2,3.... \qquad (19,12)$$
$$\text{en } k_y b = m\pi \qquad m = 1,2,3....$$

De eigenfrequenties zijn

$$\omega_{lm} = \pi c \left| \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right|^{1/2} \qquad (19,13)$$

Als $(a/b)^2$ irrationeel is, zijn alle frequenties verschillend. Is a/b rationeel dan bestaan er twee of meer identieke frequenties voor verschillende paren l,m. Men zegt, dat de eigentrillingen ontaard (degenerated) zijn.

Voor een rond membraan wordt de golfvergelijking in poolcoördinaten

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \qquad (19,14)$$

We proberen een oplossing

$$\zeta(r,\theta,t) = R(r).\Theta(\theta).T(t)$$

en vinden drie gewone differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2\Theta = 0, \quad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad (19,15)$$

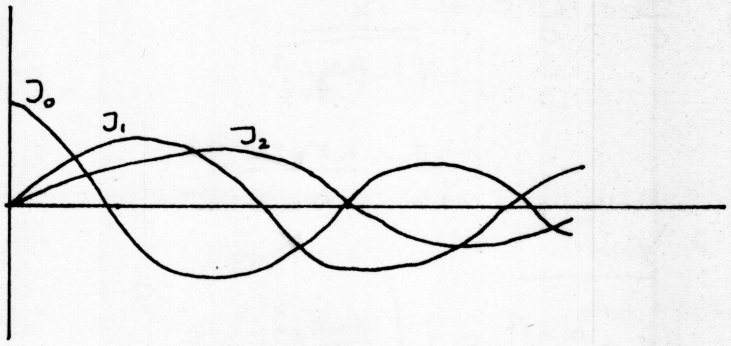
en

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0 \qquad (19,16)$$

(19,15) heeft oplossingen $e^{\pm im\theta}$ (m geheel) en $e^{\pm i\omega t}$.
Voorts herschrijven we (19,16) (met $u = \frac{\omega r}{c}$) als

$$\frac{d^2R}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dR}{du} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right) R = 0 \qquad (19,17)$$

Dit is de Bessel-vergelijking.
Er zijn twee onafhankelijke oplossingen voor elke m: Bessel functies van de 1e soort, $J_m(u)$ en Besselfuncties van de 2e soort (of Neumann-functies) $N_m(u)$.



§ 20. Interferentie van vlakke golven.

Onderstel, dat op een membraan twee vlakke golven lopen met golfvectoren $\bar{k}_1$ en $\bar{k}_2$ en gelijke frequentie en amplitude:

$$\zeta_1(x,y,t) = 1/2\ A\ e^{i(\bar{k}_1\bar{r}-\omega t)} \qquad (20,1)$$

$$\zeta_2(x,y,t) = 1/2\ A\ e^{i(\bar{k}_2\bar{r}-\omega t)} \qquad (20,2)$$

De golven hebben dezelfde snelheid. De hoek tussen de richtingen wordt gegeven door:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{k}_1,\bar{k}_2}{k^2} \qquad (20,3)$$

Kiezen we de x-as langs de bisectrix van α dan is

$$\bar{k}_1 = \bar{i}k_x + \bar{j}k_y$$
$$\bar{k}_2 = \bar{i}k_x - \bar{j}k_y \qquad (20,4)$$

De gecombineerde golf is dan

$$\zeta(x,y,t) = A\ \frac{e^{ik_y y} + e^{-ik_y y}}{2}\ e^{i(k_x x-\omega t)}$$

$$= A\cos k_y y\ e^{i(k_x x-\omega t)} \qquad (20,5)$$

Deze golf loopt in de x-richting, is in amplitude gemoduleerd in de y-richting en heeft een grotere snelheid, n.l.

$$c_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{kc}{k_x} = \frac{c}{\cos\frac{1}{2}\alpha} \qquad (20,6)$$

Voor de lijnen $y_n = (n-1/2)\,\frac{\pi}{k_y}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ (20,7)

is $\cos k_y y = 0$. Op deze knooplijnen kunnen, zonder het patroon te veranderen, vaste scheidingen geplaatst worden. Twee zulke scheidingen hebben een afstand

$$b = y_n - y_0 = n\pi/k_y$$

Het is een voorbeeld van voortplanting van golven in een golfpijp, die voor electromagnetische golven van groot belang is.

§ 21. Akoestische golven in een vloeistof of gas.

De golfvergelijking.

We beschouwen de drukafwijkingen $p(\vec{r},t)$ van de evenwichtsdruk p_o en de verplaatsingen $\bar{\rho}(r,t)$ in een vloeistof.

De compressie θ is

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nabla.\bar{\rho} \qquad (21,1)$$

θ en p zijn verbonden door de compressibiliteits-modulus B:

$$p = -B\theta = -B\nabla.\bar{\rho} \qquad (21,2)$$

De kracht op een volume-element $\Delta x\Delta y\Delta z$ in de x-richting is

$$\Delta F_x = p\Delta y\Delta z - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (21,3)$$

Voor drie richtingen wordt dit

$$\Delta\bar{F} = -\nabla p\,\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (21,4)$$

∇p is de drukgradient.

2e wet van Newton:

$$\Delta\bar{F} = \rho_o\,\Delta x\Delta y\Delta z\,\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial t^2}$$

zodat

$$-\nabla p = \rho_o\,\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial t^2} \qquad (21,5)$$

Om te komen tot een vergelijking in p nemen we van beide zijden de divergentie

$$- \nabla.\nabla p = \rho_o \frac{\partial^2 \nabla\bar{\rho}}{\partial t^2} \qquad (21,6)$$

of met (21,2):

$$+ \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{met } c^2 = \frac{B}{\rho_o} \qquad (21,7)$$

In het bovenstaande is de drukvariatie $p(\vec{r},t)$ gebruikt en niet de verplaatsing $\bar{\rho}(\bar{r},t)$. Uit een oplossing voor p kan men echter via ∇p (zie (21,5) en tweemaal over de tijd integreren $\bar{\rho}$ vinden. Voor een harmonische golf $p.e^{-i\omega t}$ wordt dit

$$\bar{\rho}(\bar{r},t) = \frac{1}{\rho_o \omega^2} \nabla p_\omega(\bar{r}) e^{-i\omega t} \qquad (21,8)$$

Aangezien rot.grad f ≡ 0 geldt

$$\text{rot } \bar{\rho}(\bar{r},t) = 0 \qquad (21,9)$$

m.a.w. harmonische compressiegolven, en daarmee alle daaruit te vormen golven, zijn rotatievrij.

§ 22. <u>De geluidssnelheid</u>

Volgens (21,7) is de voortplantingssnelheid van drukgolven:

$$c = (B/\rho_o)^{1/2} \qquad (22,1)$$

B is af te leiden uit de gaswet

$$(p_o+p)\, V = RT$$

$$(p_o)dV + pV = RdT \qquad (22,2)$$

Isotherme verandering: dT = 0

$$p_o\, dV = - pV$$

$$p = -p_o \frac{dV}{V} = - p_o\theta \equiv -B\theta$$

geluidssnelheid: $c_{iso} = (p_o/\rho_o)^{1/2}$ (22,3)

Adiabatische verandering:

$$dQ = dU + p_o dV = 0$$

$$= c_v dT + p_o dV = 0 \qquad (22,4)$$

met (22,2) $\quad c_v \frac{p_o dV + pV}{R} + p_o dV = o$

$$c_v\, p_o dV + c_v Vp + Rp_o dV = 0$$

$$(c_v+R)p_o dV + c_v Vp = 0$$

$$c_p p_o dV + c_v Vp = 0 \qquad (22,5)$$

integratie →

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{p}{p_o}$$

$$p_o V^\gamma = \text{constant} \qquad \text{(Poisson)} \qquad (22,6)$$

waarin dQ = toegevoerde warmte

dU = inwendige energietoevoer

c_v = s.w. bij constant volume

c_p = s.w. bij constante druk.

Met (22,5) wordt (21,2)

$$p = -\gamma p_o \frac{dV}{V} = -\gamma p_o \theta \equiv -B\theta \qquad (22,7)$$

en dus is de geluidssnelheid

$$c_{adiab.} = (B/\rho_o)^{1/2} = (\gamma p_o/\rho_o)^{1/2} = (\gamma \frac{RT}{m})^{1/2} = (\gamma(\frac{kT}{m_o}))^{1/2} \qquad (22,8)$$

waarin m_o de moleculaire massa is.
De adiabatische geluidssnelheid komt goed overeen met de reële waarden.
Evenals in vorige voorbeelden vindt men de golfimpedantie als de verhouding van drukverandering en verplaatsingssnelheid $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Het resultaat voor vlakke golven is

$$Z = p/\frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho_o c = (B\rho_o)^{1/2} \qquad (22,9)$$

§ 23. Sferische golven.

In bolcoördinaten luidt de golfvergelijking voor een bolsymmetrische golf:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (23,1)$$

Met $\psi = rp$ volgt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (23,2)$$

De algemene oplossing is:

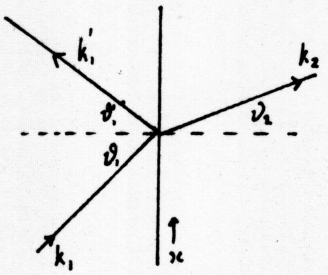
$$\psi(r,t) = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$$

of

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) + \frac{1}{r} f_2(r+ct) \qquad (23,3)$$

§ 24. Reflectie en breking

Beschouw een vlakke golf $p_1 = A_1 e^{i(\bar{k}_1 . r - \omega t)}$ in een medium 1 met dichtheid ρ_{o1} en fasesnelheid c_1, invallend op een vlak grensvlak met medium 2 met dichtheid ρ_{o2}, waarin de golf een snelheid c_2 heeft. Voor een frequentie ω zijn de golfgetallen k_1 en k_2 gegeven door $k_1 = \omega/c_1$ en $k_2 = \omega/c_2$.



Om symmetrie-redenen liggen de drie golfvectoren $\bar{k}_1$, $\bar{k}'_1$ en $\bar{k}_2$ in het vlak van inval. Aan het grensvlak moet het aantal golven per cm voor de drie golven gelijk zijn of

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x} \qquad (24,1)$$

Aangezien $k_{1x} = k_1 \sin\theta_1$, $k'_{1x} = k'_1 \sin\theta'_1$ en $k_1 = k'_1$ volgt

$$\theta'_1 = \theta_1 \qquad (24,2)$$

Voorts, aangezien $k_{2x} = k_2 \sin\theta_2$ volgt

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$$

of

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \text{(Snellius)} \qquad (24,3)$$

Voor de berekening van de amplitudes van de gereflecteerde en de gebroken golf is het gebruik van meer specifieke randvoorwaarden nodig. Zowel de druk als de verplaatsing loodrecht op het grensvlak moeten continu zijn. Voor de drie golven geldt:

$$\begin{aligned} p_1 &= A_1 \, e^{i(\bar{k}_1 . \bar{r} - \omega t)} \\ p'_1 &= A'_1 \, e^{i(\bar{k}'_1 . \bar{r} - \omega t)} \\ p_2 &= A_2 \, e^{i(\bar{k}_2 . \bar{r} - \omega t)} \end{aligned} \qquad (24,4)$$

Neem het nulpunt van de x-as in het grensvlak en de y-as loodrecht op het grensvlak. De golfvectoren hebben dan slechts een x- en een y-component $\neq 0$, terwijl de plaatsvector $\bar{r}$, voor punten in het grensvlak, slechts een x- en een z-component $\neq 0$ heeft. Dan is

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 . \bar{r} &= k_{1x} . x \\ \bar{k}'_1 . \bar{r} &= k'_{1x} . x \\ \bar{k}_2 . \bar{r} &= k_{2x} . x \quad \text{dus} \quad \bar{k}_1 . \bar{r} = \bar{k}'_1 . \bar{r} = \bar{k}_2 . \bar{r} \end{aligned} \qquad (24,5)$$

Voorts geldt

$$p_1 + p_1' = p_2 \text{ of } A_1 + A_1' = A_2 \qquad (24,6)$$

en

$$n_1 + n_1' = n_2$$

De laatste kan, met (21,8) geschreven worden als

$$\frac{1}{\rho_{o1}} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{o1}} \frac{\partial p_1'}{\partial y} = \frac{1}{\rho_{o1}} \frac{\partial p_2}{\partial y} \qquad (24,7)$$

Invullen van p_1, p_1' en p_2, van $k_{1y} = -k_1 \cos\theta$, etc. en met de wet van Snellius wordt dit

$$A_1 - A_1' = \frac{\rho_{o1}\, c_1 \sec\theta_1}{\rho_{o2}\, c_2 \sec\theta_2} A_2 \qquad (24,8)$$

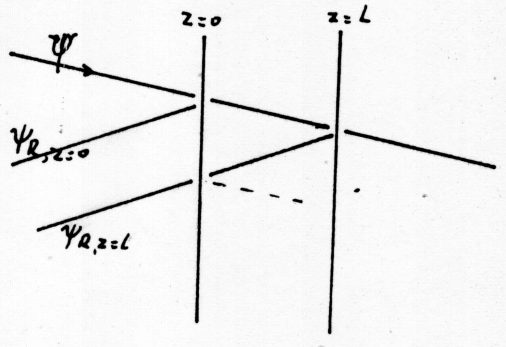
Tesamen met (24,6) vindt men

$$R_a \equiv \frac{A_1'}{A_1} = \frac{Z_2 \sec\theta_2 - Z_1 \sec\theta_1}{Z_2 \sec\theta_2 + Z_1 \sec\theta_1}, \quad Z = \rho_o c \qquad (24,9)$$

De reflectiecoëfficiënt hangt dus af van de inpedanties, de hoek van inval en van c_1/c_2 (de relatieve brekingsindex). Blijkbaar kan R_a nul worden voor een bepaalde invalshoek, de Brewster-hoek, als $Z_2 \sec\theta_2 = Z_1 \sec\theta_1$ en, bij loodrechte inval, als $Z_2 = Z_1$. Dan heten de impedanties aangepast. Deze "impedance matching" speelt een grote rol bij energie-overdracht van bijv. versterker naar luidspreker, lichtgolven van lucht naar glas, etc., waarbij reflecties de energieoverdracht verminderen.

§ 25. Impedantie-aanpassing

Men wil een golf van frequentie ω transporteren van medium 1 naar medium 3. Daartoe wordt een dunne laag van een medium 2 tussen 1 en 3 gebracht.



De reflectiecoëfficiënt tussen 1 en 2 is

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - Z_1/Z_2}{1 + Z_1/Z_2} \qquad (25,1)$$

en tussen 2 en 3

$$R_{23} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{1 - Z_3/Z_2}{1 + Z_3/Z_2} \qquad (25,2)$$

Zij de inkomende golf $\psi = A\cos(\omega t - k_1 z)$, dan is de gereflecteerde golf $\psi_{Refl\ z=o} = R_{12} A\cos(\omega t + k_1 z)$ en de 2^e gereflecteerde $\psi_{R,z=L} = T_{12} R_{23} T_{21} \cos \rightarrow (\omega t + k_1 z - 2k_2 L)$.

Voor het geval de reflectiecoëfficiënt klein is (bijv. lucht-gas overgangen voor lichtgolven), is $T_{12}\ T_{21} \approx 1$. Met verwaarlozing van meervoudige reflecties is dan de totale gereflecteerde golf:

$$\psi_{refl} = R_{12} A\cos(\omega t + k_1 z) + R_{23} A\cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L) \qquad (25,3)$$

Nu kan ψ_{refl} nul worden door:

1. $R_{12} = R_{23}$ te maken of

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3} \rightarrow Z_2 = (Z_1 Z_3)^{1/2} \qquad (25,4)$$

2. Voorts L zodanig te kiezen, dat de twee golven in tegenfase zijn, d.w.z.

$$2k_2 L = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots \qquad (25,5)$$

In het optische geval is de amplitude van de gereflecteerde golf circa 20% (de energie 4%).

Aangezien de brekingsindex evenredig is met de impedantie, moet medium 2 een brekingsindex hebben, gegeven door $n_2 = (n_1\ n_3)^{\frac{1}{2}}$.

Voor een glasluchtovergang : $n_2 = \sqrt{1 \times 1,5} = 1,22$.

De dikte van de laag moet 1/4 λ zijn.

§ 26. Potentiaalstroming

Zoals we in § 21 zagen, is het vectorveld $\bar{\rho}(\bar{r},t)$ en dus ook de afgeleide $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ rotatievrij en kan het beschreven worden als de gradient van een potentiaal

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\nabla.\phi \qquad (26,1)$$

Nu was $p = -B\nabla\rho$ (21,2). Differentiëren geeft

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B\nabla.\dot{\rho} = B\nabla^2\phi \qquad (26,2)$$

Nogmaals differentiëren en vergelijking met (21,7) levert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p = B\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (26,3)$$

of

$$p = \frac{B}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (26,4)$$

Differentiëren naar t geeft

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_o \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (26,5)$$

en combinatie met (26,2) geeft

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (26,6)$$

De golfvgl. voor ψ is dezelfde als die voor p. Uit ψ zijn weer de snelheid $\dot{\rho}$ en de druk p af te leiden.
Beschouwen we nu een vlakke golf in de x-richting, dan zijn de afgeleiden naar y en z nul en is dus

$$\text{rot } \bar{\rho} = -\bar{j} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \bar{k} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \qquad (26,7)$$

of

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Er zijn dus alleen verplaatsingen in de x-richting: longitudinale (of compressiegolven).
Bij transversale golven is het uitgangspunt $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$. In een homogeen elastisch medium geldt voor vlakke transversale golven ook: $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ ofwel tezamen div $\bar{\rho} = 0$. Transversale golven zijn divergentievrij. Het veld is te beschrijven met een vectorpotentiaal $\bar{A}$ met $\bar{A} = \text{rot } \bar{\rho}$ wegens div rot $\bar{A} = 0$.

§ 27. Electromagnetische golven

De golfvergelijkingen.

Voor materie- en ladingsvrije gebieden gelden de Maxwell-vergelijkingen:

$$\text{rot } \bar{B} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad \text{div } \bar{E} = 0 \tag{27,1}$$

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \bar{B} = 0 \tag{27,2}$$

Nemen we van (27,1) de rotatie en de afgeleide naar t van (27,2), dan volgt

$$\nabla^2 \bar{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \tag{27,3}$$

en (27,1) en (27,2) verwisselend:

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \tag{27,4}$$

met $c^2 = (\varepsilon_o \mu_o)^{-1}$ (27,5)

We vinden dus golfvergelijkingen, die niet onafhankelijk zijn, van de bekende vorm en een voortplantingssnelheid van de golven = de lichtsnelheid. Indien wel materie en lading aanwezig is, worden (27,1) en (27,2)

$$\text{rot } \bar{B} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_o J \qquad \text{div } \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{27,6}$$

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{div } \bar{B} = 0 \tag{27,7}$$

§ 28. Vlakke golven.

Een oplossing van de golfvergelijking is die waarbij $\bar{E}$ slechts van één coördinaat afhangt:

$$\bar{E} = \bar{E}_m \, e^{\,i(k_z z - \omega t)} \tag{28,1}$$

een vlakke golf in de z-richting.
Hierbij hoort een golf in het magnetische veld:

$$\bar{B} = \bar{B}_m \, e^{\,i(k_z z - \omega t)} \tag{28,2}$$

Wegens $\nabla \bar{E} = 0$ is $-ikE_{mz} \, e^{\,i(kz - \omega t)} = 0$, dus $E_{mz} = 0$
en idem wegens $\nabla . \bar{B} = 0$ is $B_{mz} = 0$.

Zowel $\bar{E}_m$ als $\bar{B}_m$ staan dus loodrecht op de voortplantingsrichting. De golven zijn transversaal.

Toepassing van de Maxwell-vergelijking (27,1) levert

$$\text{rot } \bar{B} = ik_z \, e^{i(k_z z - \omega t)} \, (-\hat{e}_x B_{my}, \hat{e}_y B_{mx}, o) = -i\omega\varepsilon_o\mu_o\bar{E}_m \qquad (28,3)$$

waaruit

$$B_{my} = \frac{\omega}{k_z}\varepsilon_o\mu_o E_{mx} \rightarrow c\, B_{my} = E_{mx} \qquad (28,4)$$

en

$$B_{mx} = -\frac{\omega}{k_z}\varepsilon_o\mu_o\, E_{my} \rightarrow -c\, B_{mx} = E_{my}$$

$\bar{E}$ en $\bar{B}$ staan loodrecht op elkaar, want $\bar{E}.\bar{B} = 0$.

Indien alleen E_{mx} en B_{my} verschillend van nul zijn, is de golf lineair gepolariseerd. Wanneer wel materie aanwezig is, kunnen polarisatie en magnetisering optreden. Deze effecten kunnen in rekening gebracht worden door de invoering van een D-veld en een H-veld:

$$\bar{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\bar{E} \qquad \text{de electrische doorschuiving} \qquad (28,5)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_o\mu_r}\bar{B} \qquad \text{het magnetisch veld} \qquad (28,6)$$

ε_r is de diëlectische constante, μ_r de permeabiliteit. De Maxwell-vergelijkingen worden dan

$$\text{rot } \bar{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \qquad \text{div } \vec{B} = 0 \qquad (28,7)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{D} = 0 \qquad (28,8)$$

De golfvergelijking wordt dan

$$\nabla^2\bar{E} = \varepsilon_o\varepsilon_r\mu_o\mu_r\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \qquad (28,9)$$

en de voortplantingssnelheid

$$c' = (\varepsilon_o\varepsilon_r\mu_o\mu_r)^{-\frac{1}{2}} = c(\varepsilon_r\mu_r)^{-\frac{1}{2}} \qquad (28,10)$$

De brekingsindex is dus $n = c/c' = (\varepsilon_r\mu_r)^{\frac{1}{2}} \approx \varepsilon_r^{\frac{1}{2}}$ (28,11)

omdat $\mu_r \approx 1$. Voor lage frequenties is ε_r constant, voor hoge frequenties (licht) is dat niet het geval en treedt dispersie op.

Bij mechanische golven in een koord werd de impedantie gedefinieerd als de verhouding van de kracht op en de momentane snelheid van het medium, in het electrische geval als de verhouding van spanning en stroom. In het geval van E.M.-golven zijn de analoge grootheden het electrisch en het magnetisch veld. De impedantie van het vacuum wordt dan

$$Z_o = \left|\frac{E}{H}\right| = \frac{|E|}{|B|/\mu_o} = \mu_o c = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}} = 377\Omega \qquad (28,12)$$

§ 29. Polarisatie.

Een algemenere oplossing is

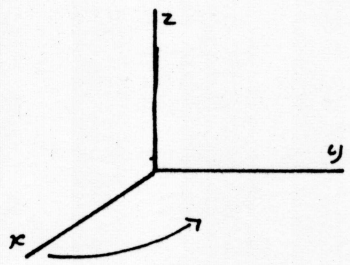
$$\bar{E} = (e_x + ie_y)E_m\, e^{\,i(kz - \omega t)} \qquad (29,1)$$

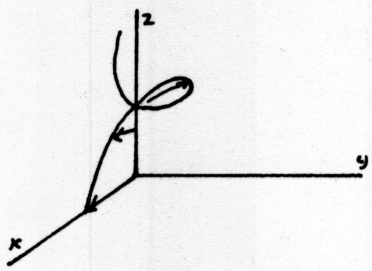
$$\bar{B} = (-ie_x + e_y)B_m\, e^{\,i(kz - \omega t)} \qquad (29,2)$$

de samenstelling van twee golven met de E-vector in de x- resp. y-richting en een faseverschil van $\frac{\pi}{2}$. Dit is een circulair gepolariseerde golf, ook te schrijven als

$$\bar{E} = e_x E_m\, e^{\,i(kz - \omega t)} + e_y E_m\, e^{\,i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} \qquad (29,3)$$

Voor een vaste waarde van z bereikt de y-component een zekere waarde later ($\Delta t = \frac{\pi}{2\omega}$) dan de x-component. De E-vector roteert rechtsom.





Voor een vaste waarde van t bereikt de y-component een zekere waarde voor een kleinere z ($\Delta z = \frac{-\pi}{2\omega}$) dan de x-component. De E-vector wordt beschreven door een schroeflijn linksom.

We kunnen het reële deel van de vectoren beschrijven met

$$E_x = |E_m| \cos(kz - \omega t + \theta) \qquad (29,4)$$

en

$$E_y = |E_m| \cos(kz - \omega t + \tfrac{\pi}{2} + \theta)$$

$$= -|E_m| \sin(kz - \omega t + \theta) \qquad (29,5)$$

waaruit volgt:

$$E_x^{\,2} + E_y^{\,2} = |E_m|^2 \qquad (29,6)$$

de vector $\bar{E}$ is constant in lengte en draait rond met de hoeksnelheid ω.

Algemenere vorm voor de elektrische vector is mogelijk als oplossing van de Maxwell-vgln. De enige voorwaarde is, zoals eerder gevonden werd, dat geldt:

$$E_{mx} = c\,B_y \quad \text{en} \quad E_{my} = -cB_{mx}$$

Laat nu: $E_x = A\cos(\omega t + \phi_1)$ ter plaatse $z = 0$ (29,7)

$E_y = B\cos(\omega t + \phi_2)$

dan volgt: $(B\cos\phi_2)E_x - (A\cos\phi_1)E_y = AB\sin(\phi_2 - \phi_1)\sin\omega t$

$(B\sin\phi_2)E_x - (A\sin\phi_1)E_y = AB\sin(\phi_2 - \phi_1)\cos\omega t$

Na quadratering op optelling worden deze twee vgln.:

$$B^2E_x^2 + A^2E_y^2 - (2AB\cos(\phi_2 - \phi_1))\,E_x\,E_y = A^2B^2(\sin(\phi_2 - \phi_1))^2 \qquad (29,8)$$

Dit is de vgl. voor een kegelsnede, die in speciale gevallen ontaardt in een rechte lijn.

Men kan onderscheiden:

1) $A \neq 0$ en $B = 0$	$\vec{E}$ langs x-as	lineair
2) $A = 0$ en $B \neq 0$	$\vec{E}$ langs y-as	lineair
3) $\phi_2-\phi_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ $(BE_x - AE_y)^2 = 0$	$\vec{E}$ maakt hoek arctg $\frac{B}{A}$ met x-as	lineair
4) $\phi_2-\phi_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ $(BE_x + AE_y)^2 = 0$	$\vec{E}$ maakt hoek -arctg $\frac{B}{A}$ met x-as	lineair
5) $\phi_2-\phi_1 = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ $\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} = 1$	$\vec{E}$ beschrijft een ellips met hoofdassen langs x- en y-as	elliptisch
6) als 5) maar <u>ook</u> $A = B$	$\vec{E}$ beschrijft cirkel	circulair
7) $\phi_2-\phi_1 \neq \pm\frac{n\pi}{2}$ (n geheel)	$\vec{E}$ beschrijft een ellips met hoofdassen die niet langs x- of y-as liggen	elliptisch

Deze tabel geeft <u>alle</u> mogelijkheden voor een ware transversale sinusgolf (d.w.z. voor constante A, B, ϕ_1 en ϕ_2). Dit betekent dat elke zuivere sinusgolf gepolariseerd <u>moet</u> zijn. Experimenteel wordt echter waargenomen, dat vele "monochromatische" lichtbronnen <u>ongepolariseerd</u> licht uitzenden. Natuurlijk licht wordt uitgezonden in golftreinen, die op zichzelf gepolariseerd zijn maar onderling geen correlatie in fase en polarisatierichting vertonen.

§ 30. Energie in electromagnetische golven.

In analogie met vorige gevallen zoeken we naar een energie-uitdrukking in het product van de veldgrootheden E en B, en wel, daar $\bar{E} \perp \bar{B}$, naar het uitprodukt $\mu_o \bar{S} \equiv \bar{E} \times \bar{B}$ ($\bar{S}$ = Poynting vector).
We nemen de div.:

$$\nabla.(\bar{E} \times \bar{B}) = \bar{B}.\nabla \times \bar{E} - \bar{E}.\nabla \times \bar{B} \qquad (30,1)$$

Dan is, met (27,6) en (27,7):

$$\frac{1}{\mu_o} \nabla.(\bar{E} \times \bar{B}) + (\varepsilon_o \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_o} \bar{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) + \bar{E}\bar{J} = 0 \qquad (30,2)$$

en met $\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E}$ en $H = \frac{1}{\mu_o} \bar{B}$

$$\nabla.(\bar{E} \times \bar{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (\tfrac{1}{2}\bar{E}.\bar{D} + \tfrac{1}{2}\bar{B}.\bar{H}) + \bar{E}.\bar{J} = 0 \qquad (30,3)$$

We beschouwen de drie termen.

De tweede term is de verandering van de energiedichtheid van het E.M. veld.
T.a.v. de derde term beschouwen we de kracht, die op lading en stroom werkt, de Lorentz-kracht:

$$\bar{F} = \rho(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = \rho\bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} \qquad (30,4)$$

De energie, die het veld per sec op de ladingen overdraagt is

$$\bar{F}.\bar{v} = \rho \bar{E} .\bar{v} = \bar{E}.\bar{J} \qquad (30,5)$$

De bijdrage van het magnetische deel is

$$(\bar{v} \times \bar{B}).\bar{v} = 0 \qquad (30,6)$$

Wanneer we (30,3) beschouwen als een energiebehoudswet (wet van Poynting, in locale vorm) dan is de derde term de energieoverdracht van veld op lading, de tweede term de verandering van energiedichtheid in het veld en kan de eerste term geïnterpreteerd worden als het energie-transport in het veld. In integrale vorm wordt (30,3):

$$\frac{1}{\mu_o} \oint (\bar{E} \times \bar{B}) dO + \frac{d}{dt} \int_V (\tfrac{1}{2} \bar{E}.\bar{D} + \tfrac{1}{2} \bar{B}.\bar{H}) dV + \int_V \bar{E}.\bar{J} dV = 0 \qquad (30,7)$$

§ 31. Golven in een geleider.

In een geleider is γ, de soortelijke weerstand de evenredigheidsfactor in de wet van Ohm:

$$\bar{J} = \gamma \bar{E} \tag{31,1}$$

Van de Maxwell-vergelijkingen verandert alleen (27,6), die wordt

$$\text{rot } \bar{B} = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_o \mu_r \gamma \bar{E} \tag{31,2}$$

Analoog aan § 27 is hieruit af te leiden een golfvergelijking voor $\bar{E}$:

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \mu_o \mu_r \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \tag{31,3}$$

Er treedt een eerste afgeleide in de vergelijking op. Deze term veroorzaakt een kleinere golfsnelheid en een exponentiële verzwakking bij het doorlopen van de geleider.

Beschouw een sinusoïdale vlakke golf in de z-richting, die lineair gepolariseerd is in de x-richting:

$$\bar{E} = \bar{e}_x E_o e^{i(\omega t - kz)} \tag{31,4}$$

Invullen van de golfvergelijking geeft:

$$k^2 = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \omega^2 - \mu_o \mu_r \gamma i \omega \tag{31,5}$$

of
$$k = \frac{\omega}{c'} \left(1 - \frac{i\gamma}{\varepsilon_o \varepsilon_r \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ met } c' = c/n \tag{31,6}$$

k is complex. Invullen van $k = k_r + ik_i$ in (31,4) geeft

$$\bar{E} = \bar{e}_x E_o e^{i(\omega t - k_r z)} \cdot e^{-k_i z} \tag{31,7}$$

De reële, exponentiële factor geeft aan, dat de golf exponentieel verzwakt (of versterkt) wordt bij toenemende z.

Beschouw een goede geleider, d.w.z. $\gamma >> \omega \varepsilon_o \varepsilon_r$, dan wordt (31,6):

$$k \approx \frac{\omega}{c'} \left(-\frac{i\gamma}{\varepsilon_o \varepsilon_r \omega}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 - i)\left(\frac{\omega \mu_o \mu_r \gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{31,8}$$

Definiëren we indringdiepte als

$$\delta = \left(\frac{2}{\omega \mu_o \mu_r \gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{31,9}$$

dan wordt de golffunctie:

$$\bar{E} = \bar{e}_x E_o \, e^{-z/\delta} \, e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

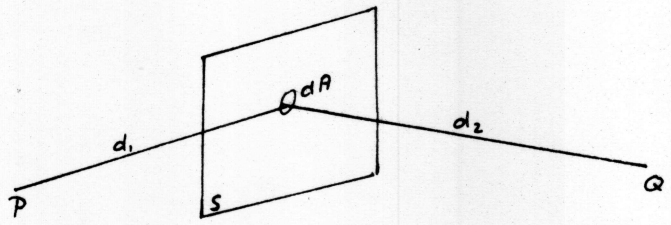
De effectieve golflengte is nu $\lambda = 2\pi\delta$, kleiner in de verhouding

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{c}{\omega\delta} = \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r}{2} \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{2}} >> 1.$$

Ook de golfsnelheid is met dezelfde factor verkleind.

§ 32. <u>De buigingsformule</u>.

We maken gebruik van het principe van Huygens, dat zegt, dat elk punt, dat door een lichtgolf bereikt wordt, zelf als nieuwe bron van trilling gaat optreden.



Vanuit P valt een bolgolf op het oppervlakje dA in het scherm S. De golf in dA wordt beschreven door

$$\psi = \frac{a \, e^{-ikd_1}}{d_1} \, dA \qquad (32,1)$$

met a als bronsterkte. Nu is ψ de sterkte van de secundaire bron, die straling naar Q zendt. In Q arriveert een golf beschreven door

$$d\psi_Q = \psi \frac{e^{-ikd_2}}{d_2} f(dA) = \frac{a}{d_1 d_2} e^{-ik(d_1+d_2)} f(A)dA \qquad (32,2)$$

waarin f(A) de transmissiefactor van het vlakje dA is. De totale golf, die Q aankomt, is dan

$$\psi_Q = \int_A \frac{a}{d_1 d_2} f(A) \, e^{-ik(d_1+d_2)} \, dA \qquad (32,3)$$

Naast de afleiding, gebaseerd op het principe van Huygens kan men een exactere afleiding van de buigingsintegraal geven, waardoor enige fouten van de eerstgenoemde worden vermeden. Uitgangspunt daarbij is een, nog steeds, scalair golfverschijnsel, dat een oplossing is van de golfvergelijking

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (32,4)$$

Het theorema van Green luidt, dat voor twee scalaire functies, die voldoen aan "ruime" voorwaarden geldt:

$$\iint_A (\psi_2 \, \mathrm{grad}_n \psi_1 - \psi_1 \, \mathrm{grad}_n \psi_2) dA = \iiint_V (\psi_2 \nabla^2 \psi_1 - \psi_1 \nabla^2 \psi_2) \, dV \qquad (32,5)$$

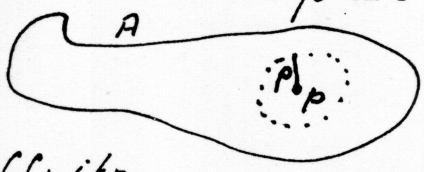
waarin A het oppervlak is, dat het volume V omsluit en grad_n de normaalcomponent van de gradient op het oppervlak voorstelt. Wanneer ψ_1 en ψ_2 functies zijn, die voldoen aan de golfvergelijking (139) en die een harmonische tijdafhankelijkheid van de vorm $e^{\pm i\omega t}$ hebben, volgt, dat de volumen-integraal nul is en dus

$$\iint (\psi_2 \,\text{grad}_n \psi_1 - \psi_1 \,\text{grad}_n \psi_2)\, dA = 0 \qquad (32,6)$$

We nemen nu voor ψ_2 een bepaalde vorm, n.l.

$$\psi_2 = \psi_{20} \frac{e^{i(kr+\omega t)}}{r}$$

een golf, die convergeert naar het punt P(r=o). We laten het volumen binnen het integratie-oppervlak P bevatten, maar sluiten P zelf uit van de integratie door een bolletje met straal ρ om P te slaan.



Op het oppervlak van dat bolletje is $\text{grad}_n = -\partial/\partial r$. Daarmee wordt (32,6) met weglating van de factor $\psi_{o2} e^{i\omega t}$

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n \psi_1 - \psi_1 \,\text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r}\right) dA - \iint \left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \psi_1 \frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r}\right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = 0 \qquad (32,7)$$

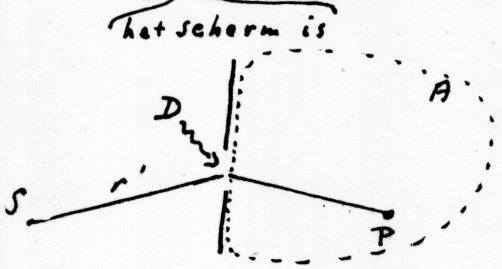
Voor $\rho \to o$ wordt de integrant van de tweede term $= (\psi_1)_{\rho=o} = \psi_P$. en dus

$$\iint \psi_P \, d\Omega = 4\pi \psi_P$$

Er volgt:

$$\psi_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(\psi_1 \,\text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \,\text{grad}_n \psi_1\right) dA \qquad (32,8)$$

Dit "Kirchhoff-theorema" kan worden toegepast op buigingsproblemen, waarbij ψ_1 het betrokken golfverschijnsel is. We nemen aan, dat de buiging optreedt aan een opening in een ondoorzichtig scherm. De vraag is, wat de golf in een punt P achter t.g.v. een golf uit het punt S. Het integratie-oppervlak wordt dan gekozen door het scherm en zo, dat P omsloten wordt. Vervolgens worden twee onderstellingen gemaakt:



1. ψ_1 en grad ψ_1 zijn op het oppervlak A verwaarloosbaar klein(!) behalve in de opening.
2. ψ_1 en grad ψ_1 hebben dezelfde waarde als in afwezigheid van het scherm.

In de opening wordt ψ beschreven door

$$\psi = \psi_0 \frac{e^{i(kr'-\omega t)}}{r'} \qquad (32,9)$$

Dit ingevuld in het theorama geeft:

$$\psi_p = \frac{\psi_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint_D \left(\frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) dA \qquad (32,10)$$

Nu is $$\text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\bar{n},\bar{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \left(\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \cos(\bar{n},\bar{r}) \qquad (32,11)$$

en analoog $\text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'}$

met $(\bar{n},\bar{r})$ de hoek tussen oppervlaktenormaal en $\bar{r}$.

Dan volgt:

$$\psi_p = -\frac{ik\psi_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left(\cos(\bar{n},\bar{r}) - \cos(\bar{n},\bar{r}') \right) dA. \qquad (32,12)$$

Passen we dit toe op het geval van een ronde opening, waar de bron S in de centrale loodlijn ligt, dan wordt (147):

$$\psi_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint \psi_0 \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left(\cos(\bar{n},\bar{r}) + 1 \right) dA \qquad (32,13)$$

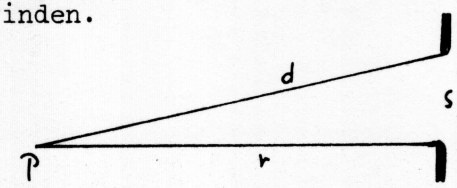
,de Fresnel-Kirchhoff buigingsformule. De verschillen met de eenvoudiger afleiding zijn

1e. de hoekfactor $\cos(\bar{n},\bar{r}) + 1$, die o.a. aangeeft, dat geen golf in achterwaartse richting verstrooid wordt.

2e. de factor -i, die een faseverschuiving van $\frac{\pi}{2}$ aangeeft.

§ 33. Fraunhofer - en Fresnel buiging.

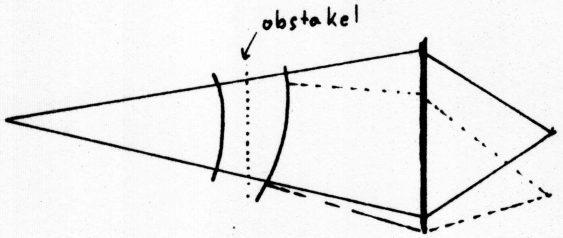
De buigingsintegraal krijgt een eenvoudiger vorm, wanneer de golffronten naar en van het buigingsoppervlak A vlak zijn, d.w.z. als P en Q zich ver van A bevinden.



Het verschil tussen de centrale afstand r en een randstraal d is bij loodrechte inval (zie figuur):

$$d-r = (r^2+s^2)^{\frac{1}{2}}-r = r(1+\frac{s^2}{2r^2}+\ldots)-r \approx \frac{s^2}{2r}$$

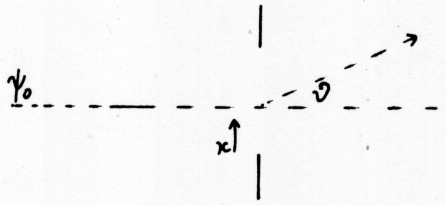
Stellen we de eis, dat $d-r < \lambda/10$, dan volgt $r > \frac{5s^2}{\lambda}$. Met $\lambda = 5.10^{-7}$m en $s = 10^{-3}$m wordt $r > 10$ m. Wanneer deze voorwaarde vervuld is, spreekt men van Fraunhofer buiging. Bij scheve inval of buiging verloopt dan de afstand tot Q lineair over het oppervlak A. Fraunhofer-buiging treedt ook op als de kromming van invallend en gebogen golffront gelijk zijn (zie figuur) en kan met behulp van lenzen ook met kortere afstanden gerealiseerd worden. Is aan bovengenoemde voorwaarde niet voldaan, dan spreekt men van Fresnel-buiging.



§ 34. Fraunhofer buiging.

Samenvatting: Het buigingspatroon van een obstakel is de Fourier getransformeerde van de transmissie functie van dat obstakel.

We beschouwen een opening A in een scherm en daarop invallend een vlakke golf.



De fase van de onder een hoek θ verstrooide golf wordt gegeven door

$$\varphi = -\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\theta = -kx\sin\theta .$$

De totale door A in de richting θ afgebogen golf wordt:

$$\psi_\theta = \psi_o \int_A f(x)e^{-ikx\sin\theta}dx$$

of

$$\psi_u = \psi_o \int_A f(x)e^{-ixu}dx \qquad (34,1)$$

waarin f(x) de transmissiefactor van A is,
D.w.z. ψ_u is de Fourier getransformeerde van f(x).

Het buigingsbeeld van een spleet ter breedte a.

$$f(x) = 1 \quad \text{voor} \quad -a/2 < x < a/2$$
$$= 0 \quad \text{daarbuiten.}$$

$$\psi_u = \psi_o \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iux} dx = \psi_o \, a \, \frac{\sin \frac{1}{2}au}{\frac{1}{2}au} \qquad (34,2)$$

zie (15,6)

De waargenomen intensiteit is:

$$I(u) = \psi_o^2 a^2 \, \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}au}{a^2u^2} \qquad (34,3)$$

Nulpunten: $\frac{1}{2}au = n\pi$ of $\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}$

Extrema: $\frac{1}{2}au = 0$.
In het centrale maximum is $I = \psi_o^2 a^2$.
Voorts als $\operatorname{tg} \frac{1}{2}au = \frac{1}{2}au$. Dit geldt ongeveer voor $\frac{1}{2}au = \frac{2n+1}{2}\pi$ $(n = 1,2,3.....)$
De intensiteit van de maxima is (ongeveer):

$$I_1 = 0{,}045 \, a^2\psi_o^2$$
$$I_2 = 0{,}016 \, a^2\psi_o^2$$
$$I_3 = 0{,}008 \, a^2\psi_o^2 \quad \text{etc.}$$

Uitbreiding tot twee dimensies geeft het buigingsbeeld van een rechthoekige opening. De intensiteit wordt gegeven door:

$$I(u,v) = \psi_o^2 a^2 b^2 \, \frac{4\sin^2 \frac{1}{2}au}{a^2u^2} \, \frac{4\sin^2 \frac{1}{2}bv}{b^2v^2} \qquad (34,4)$$

kan fout zijn

waarin a en b de zijden van de opening zijn.

Het buigingspatroon van een ronde opening.

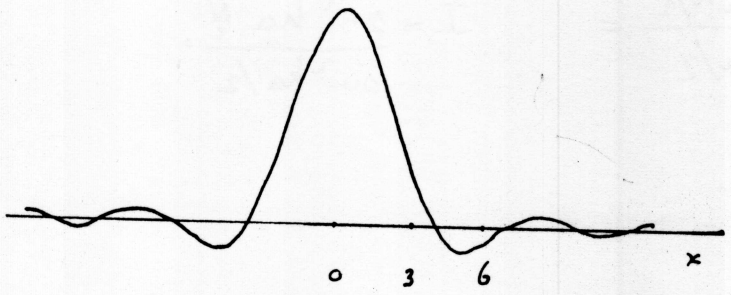
De oplossing van de buigingsintegraal luidt:

$$\psi = a^2 \, \frac{2J_1(2\pi a\theta/\lambda)}{2\pi a\theta/\lambda} \qquad (34,5)$$

met de Besselfunctie

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos x'} e^{inx'} dx'$$

waarin a de straal van de opening en θ de afbuighoek is. De vorm van $\frac{J_1(x)}{x}$ is in de figuur gegeven.



Plaats en intensiteit van de minima en maxima zijn

x	$(\frac{2J_1(x)}{x})^2$
0	1
3,8	0
5,1	0,0175
7,0	0
8,4	0,0042

Het centrale maximum heet de Airy-schijf.
Het eerste nulpunt (= minimum van intensiteit) ligt bij $\theta = 0{,}61 \frac{\lambda}{a}$

§ 35. Interferentie.

In het algemeen spreekt men van interferentie wanneer golven, komend vanuit meerdere (doorgaans gelijkvormige) openingen, samenwerken. In het volgende onderstellen we, dat op alle openingen één vlak golffront invalt.
De doorlaatfunctie van een zeer smalle spleet kan geschreven worden als een δ-functie. Het buigingsbeeld, zijnde de F.T. van deze functie is een constante intensiteit in alle richtingen (afgezien van de inclinatiefactor).

De doorlaatfunctie van twee zeer smalle spleten op afstand b kan beschreven worden als: $\delta(x-\frac{1}{2}b) + \delta(x+\frac{1}{2}b)$. De F.T. hiervan is een cos-functie (zie voorbeeld e in § 15) en de intensiteit wordt gegeven door

$$I = 4 \cos^2 \frac{ub}{2} \qquad (35,1)$$

De doorlaatfunctie van twee spleten ter breedte a met een afstand b tussen de middens beschouwen we nu als de convolutie van één spleet ter breedte a en een paar δ-functies of afstand b van elkaar. Volgens het convolutietheorema is de F.T. van deze convolutie het product van de F.T.'s van de beide functies. We

vinden dus voor de amplitude in het buigingspatroon:

$$\psi = \psi_o a \frac{\sin \frac{1}{2} au}{\frac{1}{2} au} \; 2 \cos \frac{ub}{2} \qquad (35,2)$$

De doorlaatfunctie van een serie equidistante smalle spleten is de som van een serie equidistante δ-functies.
Het buigingspatroon is berekend in voorbeeld f van §15. De intensiteit wordt gegeven door

$$I = \frac{\sin^2 buN/2}{\sin^2 bu/2} \qquad (35,3)$$

Er treden hoofdmaxima op voor $\frac{bu}{2} = n\pi$, ofwel $x\sin\theta = n\lambda$, waarvoor $I = N^2$.
Er treden minima op voor $\frac{buN}{2} = 0$.
Tussen de minima bevinden zich secundaire maxima.
Naarmate het aantal spleten groter wordt komen de minima dichter opeen te liggen en wordt dus het hoofdmaximum smaller.

Een serie spleten ter breedte a en op onderlinge afstand b kan weer als convolutie beschouwd worden van een enkele spleet en een serie δ-functies, waarmee het intensiteitspatroon gegeven wordt door

$$I = \psi_o^2 a^2 \frac{\sin^2 \frac{au}{2}}{(\frac{au}{2})^2} \; \frac{\sin^2 N \frac{ub}{2}}{\sin^2 \frac{ub}{2}} \qquad (35,4)$$

Dit is de intensiteitsverdeling in het buigingspatroon van een optisch rooster. Doorgaans zijn a en b van dezelfde grootte-orde, zodat bij voldoende grote N het gedrag van I voor kleine afbuighoeken bepaald wordt door de laatste factor. De minima liggen bij $\frac{Nub}{2} = x\pi$, de maxima ongeveer halverwege daartussen. De intensiteit van het hoofdmaximum is $I = \psi_o^2 a^2 N^2$. De intensiteit van het eerste neven maximum is

$$I = \psi_o^2 a^2 \frac{\sin^2 \frac{3}{2}\pi}{\sin^2 \frac{3}{2}\frac{\pi}{N}} \approx \psi_o^2 a^2 N^2 (\frac{2}{3\pi})^2 \approx \frac{1}{23} \psi_o^2 a^2 N^2 \qquad (35,5)$$

Rayleigh-criterium: Enigszins willekeurig definieert men twee spectraallijnen als "juist gescheiden", als een hoofdmaximum (van zekere orde) van de ene lijn samenvalt met het eerste minimum (naast het hoofdmaximum van dezelfde orde) van de andere lijn.

De spectraallijnen 1 en 2 worden beschreven met U_1, resp. $u_2 = u_1 + \Delta u$.
De plaats van het n^o orde hoofdmaximum van lijn 1 wordt gegeven door

$$\frac{u_1 b}{2} = \frac{\sin\theta_1}{\lambda_1}\frac{b}{2} = n\pi \qquad (35,6)$$

De plaats van het eerste minimum naast het n^{o} orde hoofdmaximum van b wordt gegeven door

$$\frac{Nu_2 b}{2} = \frac{N\sin\theta_2}{\lambda_2}\frac{b}{2} = (nN-1)\pi \qquad (35,7)$$

Met het Rayleigh-criterium ($\theta_1=\theta_2$) volgt hieruit:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1(1+\frac{1}{Nn}) \text{ of } \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn \qquad (35,8)$$

De minimale waarde van de roosterconstante b is $\frac{1}{2}\lambda$; dan treedt nog juist bij scherende inval en scherende terugkaatsing een wegverschil λ op. Voorts kan men schrijven Nb = B, de breedte van het rooster. Dit invullen in 13c geeft:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{B}{\frac{1}{2}\lambda} \qquad (35,9$$

Het maximale oplossend vermogen wordt dus bepaald door roosterbreedte en golflengte en is gelijk aan het maximale wegverschil, uitgedrukt als aantal golflengten. Bij een rooster met minder spleten <u>per cm</u> kan men in hogere orde meten. Het product nN blijft constant. Beide situaties worden gebruikt: roosters met circa 3000 lijnen per mm alleen in eerste orde te gebruiken en bijv. roosters met circa 150 lijnen per mm en gebruik in 20° orde. De voorkeur wordt bepaald door overlap van orde's (in het laatste geval), lichtverliezen, e.d.

Bij grotere afbuigingshoeken kan de factor $\frac{\sin^2\frac{au}{2}}{(\frac{au}{2})^2}$ zorgen baren. Men kan echter het centrale buigingsmaximum van de enkele spleet verschuiven door een lineair over de spleet verlopend faseverschil te introduceren, bij voorbeeld door in een reflectierooster de groeven scheef te slijpen (zie figuur).

De spleetfunctie wordt dan

$$f(x) = e^{ikxc} \quad \text{voor } -a/2<x<a/2 \tag{35,10}$$

en het buigingspatroon

$$\psi = \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikxc}\, e^{-ikx\sin\theta}\, dx$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx(-c+\sin\theta)}\, dx \tag{35,11}$$

De vorm van de oplossing is gelijk aan die van (34,2), maar het centrale buigingsmaximum is verschoven naar een hoek, waarvoor geldt

$$\sin\theta = c$$

Dit bij roosters veel gebruikte procédé heet "blazing". Men kan daarmee meer dan de helft van de invallende straling in een bepaalde orde doen vallen.
Bij verkleining van de roosterconstante b (bij vaste N en k) wordt de hoek, waarbij het eerste orde hoofdmaximum optreedt ($\frac{ub}{2} = \pi$) groter.
Wanneer $\theta > \frac{\pi}{2}$ kan alleen het 0° orde hoofdmaximum gerealiseerd worden. Dit gebeurt voor $b < \lambda$. We hebben dan een spiegel gemaakt.
In principe op gelijke wijze kan men een doorlaatfunctie convolueren met een twee-of drie dimensionaal rooster van δ-functies. Vooral de laatste is van groot belang bij buigingsverschijnselen aan kristallen.
Tot nu toe is steeds gebruik gemaakt van verschillende stukken uit **één vlak** golffront. Een andere mogelijkheid is om een golffront te verdelen in twee golffronten (m.b.v. een halfdoorlatende en halfreflecterende glasplaat) en deze golffronten vervolgens weer te verenigingen en te laten interfereren.
Dit is het principe van een belangrijke groep interferometers, o.a. de interferometer van Michelson en van Fabry-Pérot.

§ 36. Coherentie.

A. Tijdcoherentie.

Tot nu toe is aangenomen dat de invallende golf een valkke golf van precies één frequentie is. Licht bestaat echter uit golfpakketjes van eindige lengte, die te beschrijven zijn als

$$\psi = \psi_o\, e^{i\omega_o t}\, e^{-t^2/2\tau^2} \tag{36,1}$$

De F.T. hiervan heeft weer een Gauss-vorm en is

$$a(\omega) = B\, e^{-\tau^2(\omega_o - \omega)^2/2}. \tag{36,2}$$

Naast de frequentie ω_o komen andere frequenties, voornamelijk in het interval $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ voor.
Voorbeeld: Voor een tijd $\tau = 10^{-8}$ sec is de lengte van het golfpakket $\tau c = 3m$.
Voor $\lambda = 500$ nm is het aantal golven daarin

$$N = 3/5.10^{-7} = 6 \times 10^{6}$$

De frequentiespreiding is $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 6.10^{8}$ Hz., terwijl de frequentie

$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3{,}6.10^{15}$ Hz.
De verhouding van frequentie en frequentiebandbreedte is

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \frac{\tau}{2\pi} = \frac{c\tau}{\lambda} = N \qquad (36{,}3)$$

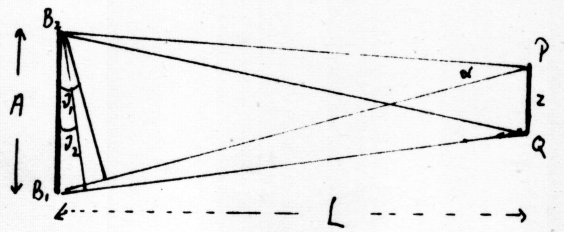
In golflengtes uitgedrukt is de lijnbreedte

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\tau c} = 8.10^{-5} \text{ nm.}$$

De fase-relatie tussen twee punten in het golfpakket wordt gegeven door de afstand van die punten en de frequentie ω_o, zolang de punten niet verder dan (ongeveer) een tijd τ uit elkaar liggen. Daarbuiten bestaat geen vaste fase-relatie meer.
Wanneer in een interferentieexperiment het wegverschil tussen de verschillende bundels kleiner is dan (ongeveer) de lengte τ, bestaat er een vaste faserelatie tussen de bundels en zal een interferentiepatroon ontstaan. De bundels heten coherent. Is het wegverschil groter dan τ, dan fluctueert de faserelatie en zal er geen interferentiepatroon ontstaan. De bundels heten incoherent. De tijd τ heet de coherentietijd en de bijbehorende lengte de coherentie-lengte. Bij een laser ontstaan door de geinduceerde emissie zeer lange golftreinen, waardoor de coherentielengte zeer groot(kilometers) wordt.

B. Plaatscoherentie.

Tot nu toe is ook aangenomen, dat de invallende golf, afkomstig was van een puntbron. In werkelijkheid heeft elke bron een zekere uitgebreidheid, die invloed heeft op het diffractiepatroon. We nemen nu aan, dat zo'n bron incoherent straalt, d.w.z. dat elk punt van de bron straling uitzendt van één frequentie, waarbij echter geen faserelatie bestaat tussen de golven uit de verschillende punten.
De vraag is nu of twee gescheiden punten P en Q al of niet coherente straling ontvangen (zie figuur).



We bezien daartoe straling van de randen B_1 en B_2 van de bron, die P en Q bereiken. De afstand tussen B en PQ is L. P ontvangt een golf die de superpositie is van de golven uit B_1 en B_2, waarbij B_2 een vertraging heeft ter grootte $A\Theta_1$. Evenzo ontvangt Q een golf, waarbij B_2 een vertraging heeft ter grootte $A\Theta_2$. Indien het verschil van deze vertragingen groter wordt dan λ, zal er (daar ook alle tussenliggende punten meedoen) geen duidelijke faserelatie tussen de golven in P en Q meer bestaan.
De grens ligt (ongeveer) bij

$$A(\Theta_2 - \Theta_1) = \lambda$$

of $$L\alpha . \frac{z}{L} = \lambda$$

of $$z = \frac{\lambda}{\alpha} \qquad (36,4)$$

Voor een cirkelvormig object wordt deze uitdrukking

$$z = 0{,}6\ \frac{\lambda}{\alpha}$$

Voorbeeld: Voor de zon ($\phi \approx \frac{1}{2}^{o}$) is de diameter van het coherentieoppervlak bij 500 nm:

$$z = 0{,}6 . \frac{5.10^{-7}}{1/120} = 0{,}6.120.5.10^{-7} = 3{,}6.10^{-5}\,m$$

De uitspraak, dat twee stralingsbronnen al of niet coherent zijn, is uiteraard een grove benadering. Er is een overgangsgebied, waarin de bronnen <u>partieel coherent</u> zijn, waarbij gedefinieerd wordt een coherentiegraad γ m.b.v. de coherentie- of correlatiefunctie:

$$\gamma(x_o) = \frac{\int_0^{\gamma} f(x) f^{*}(x+x_o)\,dx}{\int_0^{\gamma} f(x) f^{*}(x)\,dx} \qquad (36,5)$$

waarin x de dimensie tijd of lengte heeft al naar gelang tijd- of plaatscoherentie in het geding is.

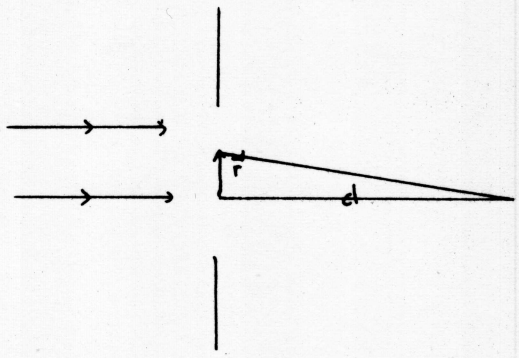
De Michelson ster-interferometer. (Zie figuur pag. 57)
Het correlatieoppervlak kan gebruikt worden voor het bepalen van sterdiameters (zie figuur). Door de afstand van twee spleten, die licht van een ster ontvangen, te varieren, kan het verdwijnen van het interferentiebeeld geconstateerd en daarna de sterdiameter gevonden worden.

§ 37. <u>Fresnel-buiging</u>.

In tegenstelling tot Fraunhofer-buiging verloopt de fase van de golf niet lineair over het buigingsobject maar (in eerste orde) kwadratisch. De

buigingsintegraal is daardoor slechts voor rotatie symmetrische objecten op te lossen; in andere gevallen wordt een grafische methode gebruikt.
De buigingsintegraal wordt

$$\psi = \frac{C}{d} \int_R f(\vec{r})\, e^{-ik\frac{r^2}{2d}}\, d\vec{r} \qquad (37,1)$$



Door de substitutie $r^2 = s$ wordt dit voor een punt op de optische as:

$$\psi = \frac{\pi C}{d} \int_R g(s)\, e^{-ik\frac{s}{2d}}\, ds \qquad (37,2)$$

Voor een ronde schijf met straal R als obstakel wordt

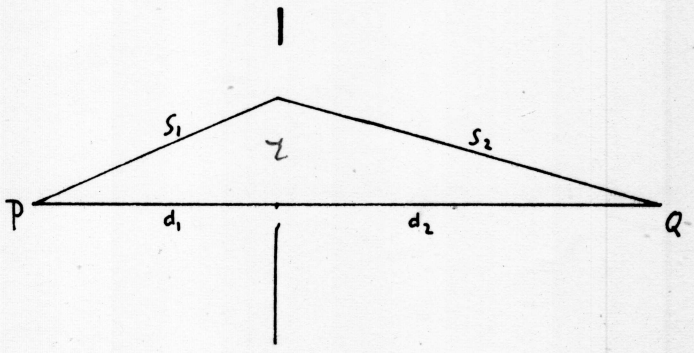
$$\psi = \frac{\pi C}{d} \int_{R^2} \ldots = -\frac{\pi C}{d} \frac{2d}{ik} \left(e^{-ik\frac{s}{2d}}\right) \Big/_{R^2}^{\infty} \qquad (37,3)$$

en de intensiteit

$$\psi\psi^* = \frac{4\pi^2 C^2}{k^2} \quad \text{, onafhankelijk van d.} \qquad (37,4)$$

Er is dus steeds een lichtpunt op de as.

Men kan ook het buigingsoppervlak in ringen verdelen, die afwisselend doorlatend en niet doorlatend zijn en wel zodanig, dat de doorgelaten golven met gelijke fase in Q aankomen en elkaar versterken.



De weglengte tussen P en Q is

$$s_1 + s_2 = (d_1^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} + (d_2^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = d_1 + d_2 + \frac{r^2}{2}(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2})$$

De verdeling geschiedt nu zo, dat $\frac{r^2}{2}(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2})$ telkens $\frac{1}{2}\lambda$ groter is.

De stralen der cirkels zijn dus

$$\frac{r^2}{2}(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}) = \frac{n\lambda}{2}$$

of

$$r_n = (n\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1+d_2})^{\frac{1}{2}} \qquad (37,5)$$

De oppervlakte van de zones is

$$\pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1+d_2} = \pi r_1^2 \quad \text{onafhankelijk van n} \qquad (37,6)$$

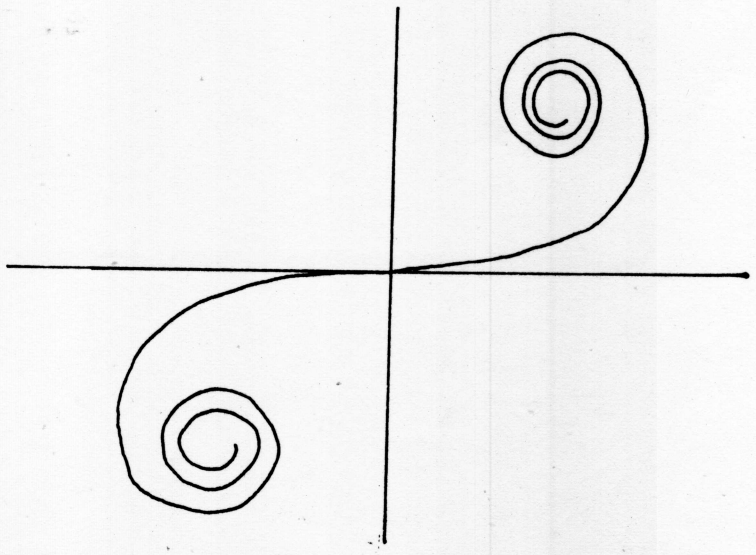
Een zoneplaat is te gebruiken als lens met een brandpuntsafstand gegeven door

$$f = \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)^{-1} = \frac{r_1^2}{\lambda} \qquad (37,7)$$

Voor de berekening van Fresnel-buiging aan rechte obstakels splitst men de integraal als volgt:

$$I = \int_o^{x_o} e^{ik\frac{x^2}{2d}}\,dx = \int_o^{x_o} \cos k\frac{x^2}{2d}\,dx + i\int_o^{x_o} \sin k\frac{x^2}{2d}\,dx \qquad (37,8)$$

en bezigt voor de berekening van I tussen willekeurige grenzen de grafiek van I, de z.g. Cornu-spiraal.



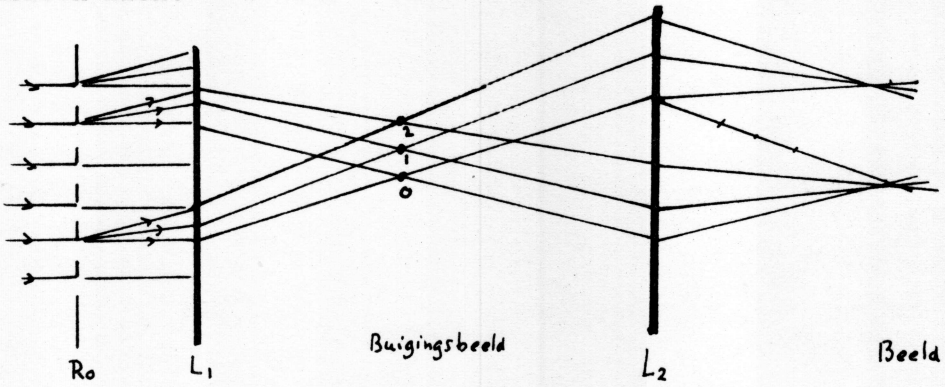
§ 38. Afbeeldingen en buiging.

Beeldvorming

De afbeelding van uitgebreide objecten ondervindt invloed van het golfkarakter van het licht.

Een generalisering van het hiervoor behandelde leidt tot de afbeeldingstheorie die door Abbe is gestart.

Een afbeelding kan opgevat worden als twee opeenvolgende buigingsprocessen. Ter illustratie beschouwen we de afbeelding van een optisch rooster in monochromatisch licht.



In het brandvlak van L_1 worden de verschillende orde's gevormd, het buigingsbeeld van het rooster. Dit buigingsbeeld fungeert nu als object voor een tweede lens, die daarvan in het brandvlak weer een buigingsbeeld formeert. Dit tweede buigingsbeeld is een afbeelding van het rooster, immers de F.T. van de F.T. van een functie levert (op een constante na) de oorspronkelijke functie. Het beeld is echter niet ideaal, want de openingshoeken van de lenzen begrenzen het aantal orde's dat aan de beeldvorming deelneemt.

De hoofdmaxima liggen in richtingen, gegeven door $\sin\theta = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{a}$. Is θ_o de openingshoek van L_1, dan is het maximale aantal orders, dat meedoet aan de beeldvorming, hierdoor bepaald. Indien alleen de 0° orde wordt doorgelaten, is er geen mogelijkheid tot interferentie en is het "beeld" een constante intensiteit over het gehele gebied. Worden ook de 1° orde spectra doorgelaten, dan interfereren de drie bundels: tot

$$\psi_{beeld} = 1 + e^{ikx\sin\theta} + e^{-ikx\sin\theta} = 1 + \cos(kx\sin\theta) \qquad (38,1)$$

Worden meer orde's doorgelaten, dan komt steeds meer de blokvorm van het rooster te voorschijn. Het kleinste detail, dat in het beeld te zien is, is dan

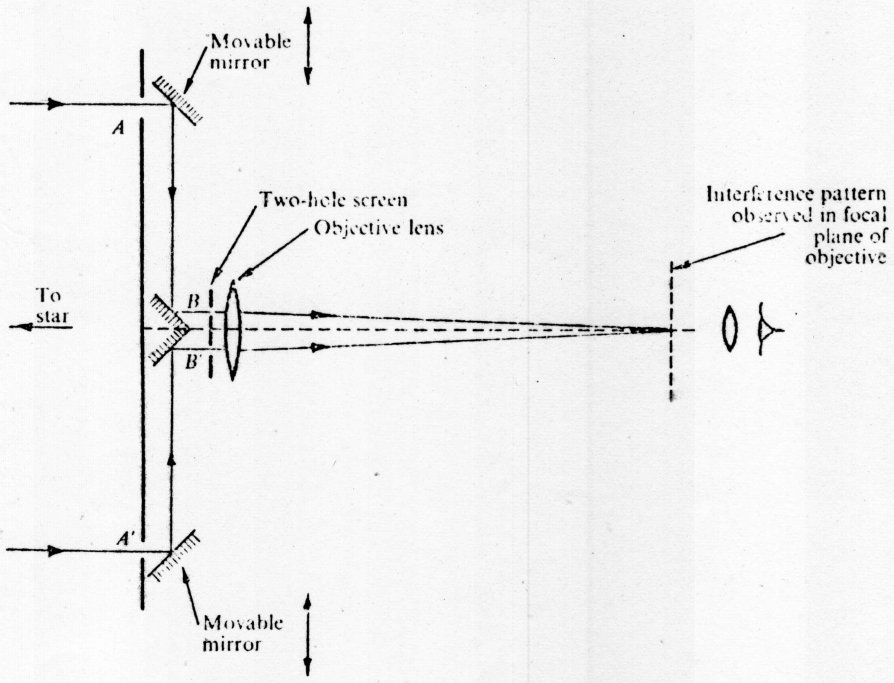
$$\frac{2a}{2n+1} = \frac{\lambda}{\sin\theta} \qquad (38,2)$$

Een willekeurig voorwerp in de plaats van het rooster, kan opgevat worden als een onregelmatig (2-dimensionaal) rooster. Hierop is dezelfde redenering van toepassing.
Het bestaan van een buigingsbeeld in de afbeelding geeft de mogelijkheid om in de beeldvorming m.b.v. filtertechnieken in te grijpen.

Faseobjecten

We beschouwen een glasplaat, waarin regelmatige ondiepe groeven zijn aangebracht. De doorlaatfunctie van deze plaat is overal gelijk in grootte, maar er is een periodieke fasesprong evenredig met de diepte van de groef. We plaatsen dit faserooster in de opstelling. Het buigingsbeeld is samengesteld uit de F.T. van het reële deel van de doorlaatfunctie, dat is het buigingspatroon van een enkele opening,en de F.T. van het faserooster, die dezelfde vorm heeft als die van een amplitude rooster, echter met een fasedraaiing van $\frac{\pi}{2}$. De amplitude van de eerste is veel groter dan die van de tweede. De totale verlichting van het beeld, gevormd door de tweede lens, is uniform. Wanneer de fase van het nulde orde maximum echter gelijk gemaakt wordt aan die van de andere orde's (m.b.v. een $\lambda/4$ plaatje) en tevens verzwakt wordt , worden de faseverschillen omgezet in intensiteitsverschillen.
De fase contrast methode werkt optimaal als de faseverschillen klein zijn t.o.v. 2π.

Michelson ster-interferometer



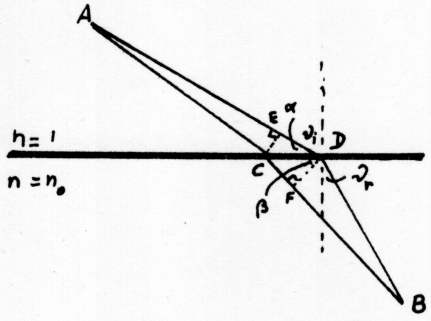
§ 39. Geometrische Optica.

In de geometrische optica gebruikt men de benadering, dat licht zich rechtlijnig voortplant. Deze benadering is goed bruikbaar wanneer de golflengte van het licht zeer klein is vergeleken bij de afmetingen van de apparatuur.

Het principe van Fermat.

Het principe van Fermat is één van de minimum principes waarmee met weinig detailberekeningen gevolgtrekkingen in specifieke situaties gemaakt kunnen worden. Uitgangspunt is, dat de lichtsnelheid in een stof een factor n, de brekingsindex, kleiner is dan de lichtsnelheid in vacuum. Definieert men dan de "optische weglengte als $\int n ds$ langs de lichtweg, dan luidt het principe: Licht volgt een zodanige weg van A naar B, dat naburige wegen in eerste orde gelijke optische weglengte hebben; of $\delta \int n ds = 0$. Slordiger uitgedrukt: Een lichtstraal volgt die weg tussen A en B, waarvoor het de minste tijd nodig heeft.

Uit dit principe volgen o.a. de reflectiewet (m.b.v. het beeldpunt) en de brekingswet van Snellius (zie figuur): Vergelijk de optische weglengte van ADB en ACB.

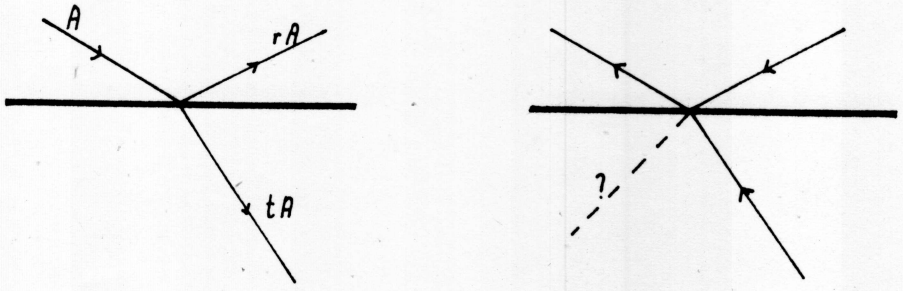


$$\begin{aligned} ADB - ACB &= ED - n_o CF \\ &= CD\cos\alpha - n_o CD\sin\beta \\ &= CD(\sin\theta_i - n_o \sin\theta_r) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{dus } \sin\theta_i = n_o \sin\theta_r \qquad (39,1)$$

Uit het principe van Fermat volgt ook de omkeerbaarheid van de stralengang. Een toepassing van het laatste is de afleiding van de fasesprong π, die een golf bij reflectie aan een grensvlak met een medium met hogere brekingsindex ondergaat (zie figuur):

Stel, dat een fractie r van de amplitude van de invallende bundel gereflecteerd wordt en een fractie t gebroken ($r^2 + t^2 = 1$).



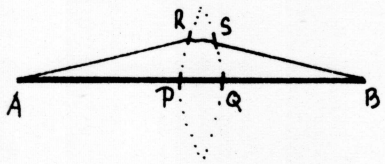
Wegens de omkeerbaarheid moet dezelfde situatie ontstaan bij inval van twee bundels rA en tA in P. Voor rA geldt dezelfde verhouding tussen gereflecteerd en gebroken gedeelte ; voor tA, vanaf de andere kant invallend (wellicht ?) een andere: r ' en t'.

Er volgt: $r^2 + tt' = 1$, of $t = t'$

en $t(r + r') = 0$ of $r = -r'$.

Er moet dus bij één der gereflecteerde bundels en fasesprong π optreden. Het experiment leert, dat dit het geval is bij de bundel in de stof met de lagere brekingsindex.

Het principe van Fermat levert ook de vorm van een lensoppervlak. (zie figuur).

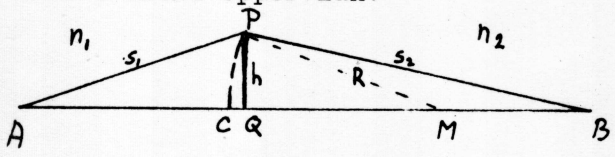


We wensen, dat licht van A naar B gaat. De kortste optische weglengte (zonder obstakels) is stellig alleen APQB. Indien we deze weg verlengen door een stuk glas ter dikte PQ tot AP + n.PQ. + QB, kunnen we andere wegen, bijv. ARSB, een gelijke optische weglengte geven door hier minder glas, RS, aan te brengen. Het licht ziet nu in de door de lens bevatte ruimtehoek overal dezelfde optische weglengte en zal al die wegen ook gebruiken om van A naar B te gaan.

De verklaring van het principe ligt in het golfkarakter van het licht (of in het kanskarakter dat een foton van A naar B gaat): de golven via en vlak in de buurt van de minimum weg komen met gelijke fase in B aan en versterken elkaar. Bij wegen, die verder van de minimum-weg liggen, treden faseverschillen op bij aankomst in B, die tot vrijwel complete uitdoving van die straling leiden.

Lenzen.

a. Eén brekend oppervlak.



$n_2 > n_1$

Stel, dat het brekend oppervlak een vlak door P en $\perp$ AB is. De optische weglengte APB is groter dan AQB. Het verschil is

$$n_1 \frac{h^2}{2s_1} + n_2 \frac{h^2}{2s_2} \qquad (39,2)$$

Dit kan gecompenseerd worden door het oppervlak een kromming te geven met kromtestraal R. De extra optische weglengte in AQB is dan

$(n_2 - n_1)QC = (n_2 - n_1) \frac{h^2}{2R}$.

De compensatie is voldoende als

$$n_1 \frac{h^2}{2s_1} + n_2 \frac{h^2}{2s_2} = (n_2 - n_1)\frac{h^2}{2R}$$

of als

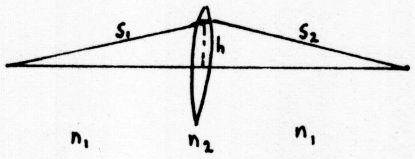
$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad (39,3)$$

Als $s_1 \to \infty$, dan heet s_2 brandpuntsafstand f_2, gegeven door $\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ (39,4)

Evenzo $f_1 \equiv s_1$ als $s_2 \to \infty$.

b. Twee brekende oppervlakken.

In het geval van een enkelvoudige, dunne lens moet de dikte D van de lens op de optische as de gewenste vertraging geven of



$$n_1 \frac{h^2}{2s_1} + n_1 \frac{h^2}{2s_2} = (n_2 - n_1)D$$

$$= (n_2 - n_1)\left(\frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2}\right)$$

waarin R_1 en R_2 de kromtestralen van de oppervlakken zijn vereenvoudigd:

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (39,5)$$

Als s_1 of $s_2 \to \infty$, kan weer de brandpuntsafstand gedefinieerd worden als

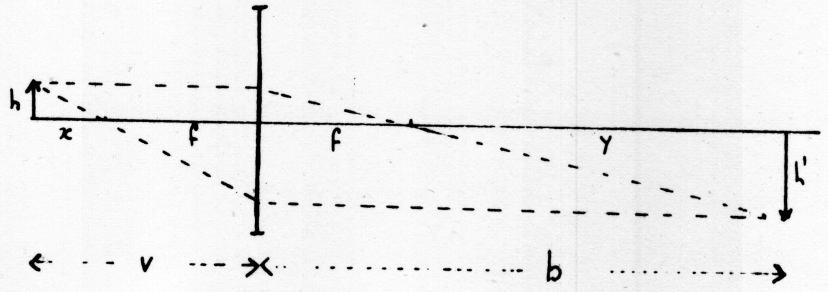
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (39,6)$$

met $n = \frac{n_2}{n_1}$.

Hiermee is (39,5) te schrijven als

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \qquad (39,7)$$

c. Vergroting.



Het beeld van een voorwerp (niet alleen een punt op de as) is te vinden door de constructie van de twee stralen, die door de twee brandpunten gaan (en dus voor, resp. achter de lens evenwijdig aan de as lopen). De vergroting is daarbij

$$V = \frac{h'}{h} = \frac{b}{v} \quad \text{(zie figuur)} \tag{39,8}$$

Uit de figuur volgt ook:

$$\frac{h'}{f} = \frac{h}{x} \quad \text{en} \quad \frac{h'}{y} = \frac{h}{f}$$

waaruit:

$$V = \frac{h'}{h} = \frac{f}{x} = \frac{y}{f} \tag{39,9}$$

Tevens blijkt:

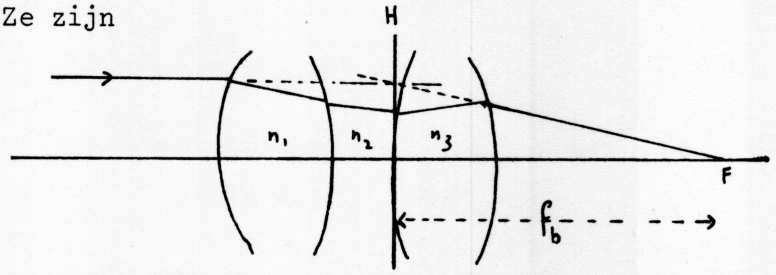
$$x.y = f^2 \tag{39,10}$$

een uitdrukking, waarmee gemakkelijker te werken is dan met (39,7).

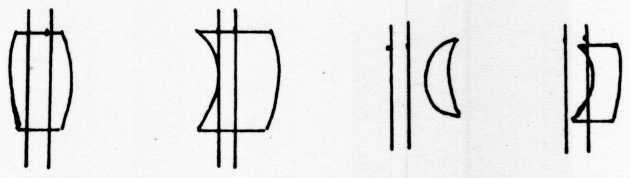
d. Dikke en samengestelde lenzen.

De stralengang kan vervolgd worden door bij elk brekend oppervlak het beeld van een voorwerp te continueren en dit beeld als voorwerp voor het volgende brekende oppervlak te gebruiken.

Voor de beschrijving van een lenzenstelsel worden de "hoofdvlakken" gebezigd. Ze zijn

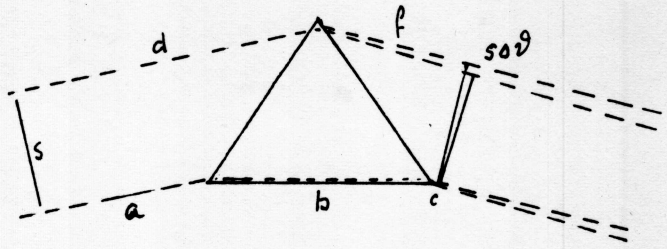


gedefinieerd als de twee vlakken, die met vergroting 1 op elkaar afgebeeld worden. De tussenliggende afstand doet a.h.w. niet mee aan de beeldvorming.



Hoofdvlakken.

Dispersie van een prisma



De hoekdispersie van een prisma is te schrijven als

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\theta}{dn}\frac{dn}{d\lambda} \qquad (39,11)$$

We beschouwen twee weinig verschillende golflengten λ en $\lambda + \Delta\lambda$, die afgebogen worden onder hoeken θ en $\theta + \Delta\theta$.
Voor de golflengte λ geldt:

$$a + nb + c = d + f.$$

Voor de golflengte $\lambda + \Delta\lambda$ geldt:

$$a + (n + \Delta n)b + c = d + f + s\Delta\theta.$$

Hieruit volgt:

$$b\Delta n = s\Delta\theta$$

of

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{b}{s} \qquad (39,12)$$

Een benaderingsformule voor de brekingsindex (Cauchy) is:

$$n = A + B.\lambda^{-2}$$

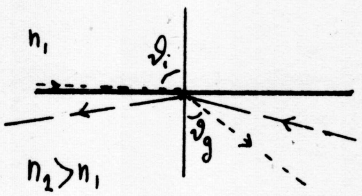
dus

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2B\lambda^{-3}.$$

De hoekdispersie wordt dus:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{2b}{s} B\lambda^{-3} \qquad (39,13)$$

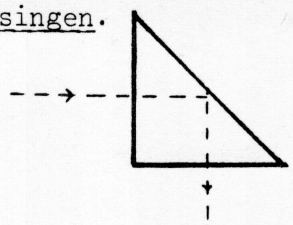
Totale reflectie.



De brekingswet geeft voor een scherend invallende bundel ($\theta_i \approx 90^\circ$)
$\sin \theta_g = \frac{1}{n}$.

θ_g heet de grenshoek. Een bundel in het medium met de grotere brekingsindex die onder een grotere hoek dan θ_g op het grensvlak valt, wordt totaal gereflecteerd.

Toepassingen.



1. De grenshoek glas-lucht is circa 42°. Hierdoor zijn 45°-45°-90° prisma's als zeer goede spiegels voor 90° afbuiging te gebruiken.
2. Vezel optiek. Men maakt bundels bestaande uit vele, dunne (20 tot 50μ) en daardoor buigzame glazen cylindertjes. Na intrede in het eindvlak van een cylinder wordt het licht door totale reflectie naar het andere eindvlak geleid, ook als de bundel gebogen wordt.

Aberraties

Samenstellingen van lenzen en/of spiegels hebben vele optische apparaten geleverd. De bouw is in eerste instantie veelal gemakkelijk te doorzien. Het opvoeren van de kwaliteit van de apparaten, bijvoorbeeld wat betreft afbeeldingsscherpte, lichtsterkte en beeldveld is een nog voortgaand proces, dat zich afspeelt rond de verschillende lensfouten. De voornaamste zijn de volgende:

Sferische aberratie. Lenzen met sferische oppervlakken voldoen niet geheel aan de voorwaarde van gelijke optische weglengte voor alle punten van de lens. Een correctiemethode is de combinatie van een positieve en een negatieve lens van verschillende glassoorten.

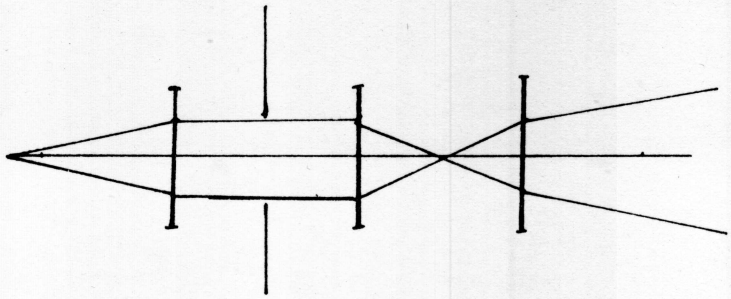
Coma. Een punt, dat niet op de optische as ligt, wordt niet als een punt afgebeeld. Een "buiging" van de lens, zodat de lens een bol en een hol oppervlak heeft, kan deze fout verminderen.

Astigmatisme. Bij zeer scheve inval lijkt het lensoppervlak in een bepaalde richting sterker gekromd dan in een richting loodrecht daarop.

Chromatische aberratie. Wegens de dispersie worden kortgolvige stralen dichter bij de lens samengebracht dan langgolvige stralen (treedt niet op bij spiegels).

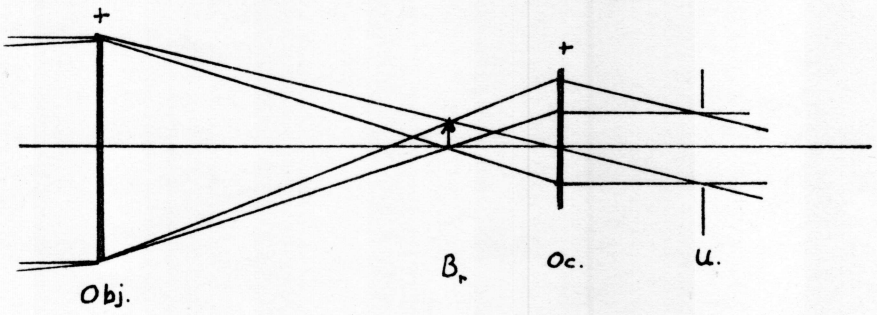
In- en uittreepupil, in- en uittreevenster

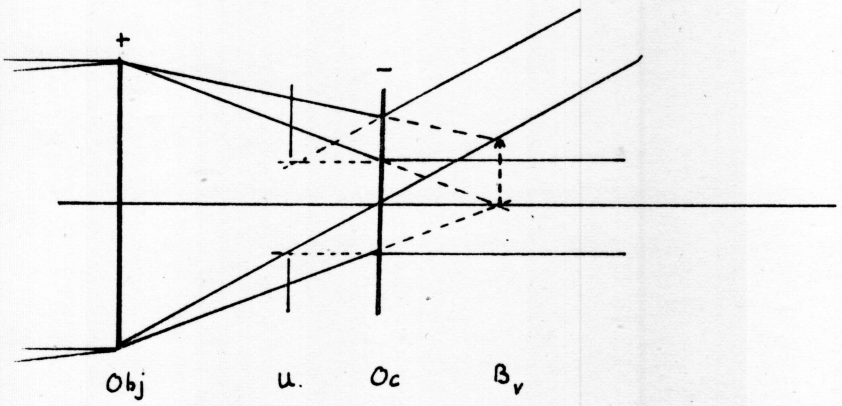
De helderheid van een beeld, gevormd door een lenzenstelsel wordt bepaald door de openingshoek van de lichtbundels. In zo'n stelsel is steeds een diafragma aan te wijzen (Engels: aperture stop), dat de lichtkegel, komend van het punt van het object, dat op de optische as ligt, begrenst. (zie figuur)



Het beeld van dit diafragma, gevormd door de lenzen ervoor, heet de intreepupil, het beeld gevormd door de lenzen erachter, heet de uittreepupil. Het gezichtsveld wordt beperkt door een diafragma (Engels: field stop) in een reeël tussenbeeld van het voorwerp (soms is dit niet aanwezig). Het beeld van dit diafragma, gevormd door de lenzen ervoor heet het inttreevenster, het beeld gevormd door de lenzen erachter heet het uittreevenster.

Uiteraard zijn beide begrenzingen steeds op één of andere manier door het stelsel bepaald. Opzettelijke beperkingen van gezichtsveld en/of openingshoek heeft tot doel de afsnijding van slechte stukken (bijv. t.g.v. coma) van het beeld, resp. het verbeteren van de beeldkwaliteit (bijv. door vermijding van overmatige sferische aberratie, maar ten koste van het oplossend vermogen).





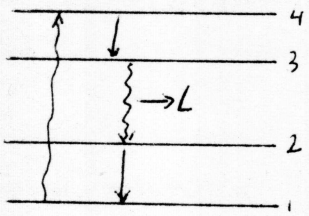
§ 40. Lasers.

Laserwerking kan ontstaan wanneer in een medium een populatie-inversie tot stand wordt gebracht. Een lichtbundel zal in zo'n medium versterkt worden wanneer de gestimuleerde emissie groter is dan som van absorptie en verliezen. (o.a. door buiging en verstrooiing).

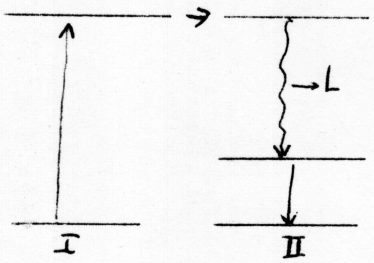
Pompen.

De voornaamste manieren waarop een inversie verkregen wordt, zijn

a. absorptie van straling. Hoge bezetting van nivo 3 wordt verkregen door stralings-overgangen 1-4, gevolgd door een overgang 4-3. Het ontstaan van een inversie wordt vergemakkelijkt door een nivo 2 te gebruiken, dat snel ontvolkt wordt door overgang 2-1.



b. inelastische botsingen. In een mengsel van twee of meer gassen kan een soort atomen$^{(I)}$ door electron-atoom botsingen geëxciteerd worden naar een nivo, dat (ongeveer) even hoog ligt als een nivo 3 van een soort atomen$^{(II)}$, van waaruit overgangen met laserwerking naar een lager nivo mogelijk zijn (He-Ne).

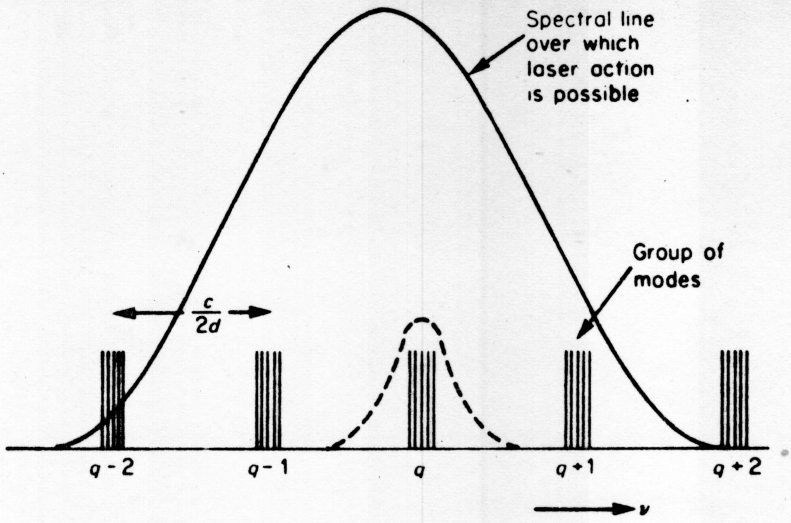


c. door injectie van ladingdragers in halfgeleiders, o.a. Ga-As p-n junctions. Recombinatieprocessen van electronen en gaten zijn de overgangen, waarin gestimuleerde emissie optreedt.

d. chemische lasers.

Opsluiting van het medium.

Daar de versterking van de straling per doorgang meestal klein is (enige %) laat men de straling een aantal malen het medium doorlopen door opsluiting tussen twee spiegels, waarvan minstens één enige transmissie heeft (zie Fabry-Pérot). De mogelijkheid tot laserwerking bestaat dan bij die frequenties, die eigentrillingen van deze trilholte zijn. Dat zijn in de eerste plaats de longitudinale modes die liggen op de afstanden c/2d (d= spiegelafstand), in de tweede plaats transversale modes, die in groepjes om de longitudinale modes liggen. Voorts moet voldoende versterking aanwezig zijn. Hierdoor wordt het aantal modes beperkt door het Doppler-profiel van de overgang en de optredende verliezen.



Spontane en gestimuleerde overgangen.

Voor het verkrijgen van een lawine-effect is tevens nodig, dat de gestimuleerde emissie overheerst over de spontane emissie. Voor twee toestanden n en m en een stralingsdichtheid $I(\omega)$ is het aantal (absorberende) overgangen $n \rightarrow m$ gelijk aan

$$B(\omega)\ I(\omega)N_n \tag{40,1}$$

en het aantal (emitterende) overgangen $m \rightarrow n$ gelijk aan

$$\underset{\text{stim.}}{B(\omega)\ I(\omega)N_m} + \underset{\text{spontaan}}{A(\omega)N_m} \tag{40,2}$$

In evenwicht zijn deze uitdrukkingen gelijk, zodat

$$\frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{N_m}{I(\omega)\ (N_n - N_m)} = \frac{1}{I(\omega)}\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kt}} - 1\right)^{-1} \tag{40,3}$$

Met Planck:

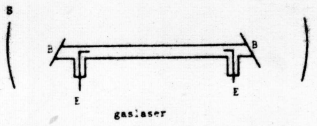
$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)^{-1} \tag{40,4}$$

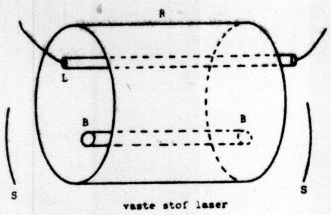
wordt dit

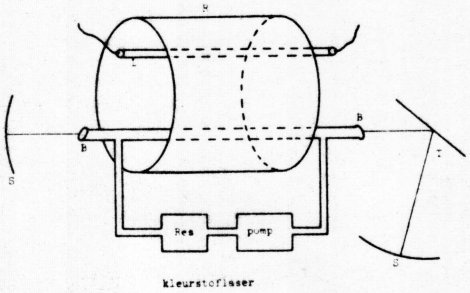
$$\frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{4\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} \tag{40,5}$$

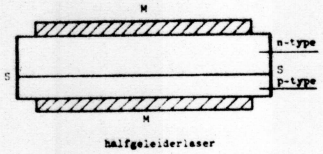
Gestimuleerde processen worden relatief waarschijnlijker bij lage frequenties, of: hoe hoger de frequentie des te groter is de stralingsdichtheid die nodig is om gestimuleerde emissie te doen overheersen over spontane emissie.

Classificatie van lasers.









a. Gaslasers

a.1. atomaire lasers: He-Ne, Ne, Ar, O, C.

a.2. geioniseerde gaslasers: Ar, Kr, Cl , Br, Hg.

a.3. moleculaire lasers CO_2, CO, NO_2, H_2O.

b. Kleurstoflasers, afstembaar.

c. Vaste stof-lasers: robijn (Cr^{3+} in Al_2O_3)

d. Halfgeleider lasers: GaAs, CdS.

Continu of gepulst gebruik.

In sommige lasers is geen stationaire inversie te verkrijgen, zodat gepulst gebruik noodzaak is. In andere wordt de gestimuleerde emissie onderdrukt (door bijv. de spiegels niet evenwijdig te plaatsen) totdat een grote inversie opgebouwd is, waarna een sterke puls wordt verkregen.(Q-Switching).

Bij continu gebruik wordt de spectrale breedte van de laserlijn allereerst begrensd door de gebruikte F.P. Echter door de versterking per doorgang wordt de effectieve reflectiecoëfficient vergroot, zodat een grotere finesse, d.w.z. een smallere lijn onstaat.

Hoewel de lijn zeer smal is, ligt de golflengte niet even goed vast door veranderingen in de lengte van F.P., in de gasdruk, etc. Zonder voorzorg is de stabiliteit $\approx 1 : 10^7$

Zeer korte pulsen ($\sim 10^{-12}$ sec) worden gemaakt met verzadigbare absorberende stoffen

FYSISCH LABORATORIUM
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

WERKCOLLEGE TRILLINGEN, GOLVEN EN OPTICA

September 1973

1. Een gestrekt oneindig lang koord wordt op $t = 0$ met een hamer ter breedte a aangeslagen, zodat het gedeelte tussen $x = 0$ en $x = a$ een beginsnelheid v_0 krijgt. Wat is de beweging van het koord?

2. Een lange, gespannen snaar is vastgemaakt ter plaatse $x = l$. De golf $\eta(x,t) = A \exp -\alpha(x - ct)^2$ nadert het bevestigingspunt van links en wordt teruggekaatst. Bereken de gereflecteerde golf.

3. De twee golven $\eta_1(x,t) = 6\cos(kx - \omega t + \pi/6)$
en $\eta_2(x,t) = 8\sin(kx - \omega t + \pi/6)$
planten zich voort langs een gespannen snaar.
   a) Geef de complexe voorstelling van deze golven.
   b) Geef de complexe en de reële voorstelling van de somgolf $\eta_1(x,t) + \eta_2(x,t)$.
   c) Leid de reële voorstelling van de somgolf af onder gebruikmaking van alleen trigonometrische identiteiten in het <u>reële</u> domein.

4. Twee golven $y_1 = A_1\cos(kx - \omega t)$
en $y_2 = A_2\cos(kx + \omega t)$
lopen in een gespannen snaar.
Toon aan dat de verhouding A_1/A_2 gegeven wordt door de "standing wave ratio" S, d.i. de verhouding van maximum en minimum van de omhullende van het golfpatroon.

   <u>Aanwijzing:</u>
   Schrijf de complexe somtrilling in de vorm $y_1(1 + r)$ en bepaal de relatieve amplitude $|1 + r(x)|$ hiervan.

5. Drie lange identieke koorden A, B, C (dichtheid ρ) zijn onder hoeken van 120° in een punt P aan elkaar bevestigd. In alle drie heerst een spanning T. Koord A wordt op grote afstand van P sinusvormig aangedreven met uitwijkingen loodrecht op het vlak van de koorden.
   a. Wat zijn de reflectie- en transmissiecoëfficiënten voor amplitude en vermogen in P?
   b. Dezelfde vragen als B en C een hoek van $+150^\circ$ en -150° met A maken.

6. De beweging van een koordsegment ($0 < x < 1$) wordt gegeven door:
$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{n} \sin k_n x(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t).$$
Wat is de totale potentiële energie en wat is hiervan het tijdsgemiddelde?

FYSISCH LABORATORIUM
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

Werkcollege Trillingen, Golven en Optica

september 1973

7. De funktie f(t) is gedefinieerd door de relaties:

(i) $f(t) = |t| \quad , -\frac{T}{2} < t < +\frac{T}{2}$

(ii) $f(t+T) = f(t)$.

Geef de Fourier-reeks waardoor deze funktie kan worden voorgesteld.

8. Bereken de Fourier-getransformeerde functie (FT) van de blokfunktie f(x):

$f(x) = -h \quad -1 < x < 0$

$f(x) = h \quad 0 \leq x < 1$

$f(x) = 0 \quad |x| > 1$

9. Bepaal de convolutie van twee blokfuncties f en g, die beide een breedte a en hoogte h hebben:

$f(x) = g(x) = h$ als $|x| < \frac{a}{2}$

$f(x) = g(x) = 0$ als $|x| \geq \frac{a}{2}$

10. De fasesnelheid van oppervlaktegolven in diep water wordt gegeven door de uitdrukking:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho}},$$

waar geldt: g = zwaartekrachtversnelling,

k = $2\pi/\lambda$ = golfgetal,

S = oppervlaktespanning,

ρ = dichtheid.

Stel dat het wateroppervlak verstoord wordt door golven waarvan de golflengten alle liggen in een klein interval.

11. Bereken de verhouding van groepsnelheid en fasesnelheid indien voornamelijk
(I) De zwaartekracht of
(II) de oppervlaktespanning het golfverschijnsel bepaalt.
In welk(e) geval(len) is er sprake van anomale dispersie ?
Verwacht u dat er golflengten bestaan waarvoor geen dispersie optreedt ?
Wat is minimum snelheid van de golven ?
Bij welke golflengte treedt die op ? S = $7{,}2.10^{-2}\,Nm^{-1}$).

12a. Bewijs, uitgaande van de definitie van groepssnelheid u en fasesnelheid v uitgedrukt in ω en k, dat de volgende relatie geldt:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

b) Schets het verloop van v als funktie van λ voor drie gevallen:
normale, anomale en geen dispersie.

c) Bij voortplanting van elektromagnetische golven tussen twee vlakke geleiders geldt:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}$$

c = lichtsnelheid
α = reële konstante

1. Bewijs dat hierbij geldt: u.v = konstant.
2. Welk geval van dispersie doet zich hier voor ?
3. Welke konklusie omtrent ω volgt uit het gegeven dat $\alpha = 10^{-2}$m ?

WERKCOLLEGE TRILLINGEN GOLVEN EN OPTICA, september 1973.

13. Gegeven een geluidsgolf

$$p(\bar{r},t) = p_m \exp i(\bar{k}.\bar{r} - \omega t) .$$

1. Bewijs dat deze golf aan de golfvgl. voldoet
2. een vlakke golf voorstelt in de richting van $\bar{k}$.
3. Leid af de uitdrukking voor de uitwijking $\bar{\rho}$ en
4. de snelheid $\dot{\bar{\rho}}$ van het medium in de golf.
5. Verifieer dat de golf rotatievrij is.
6. De karakteristieke impedantie is gedefinieerd als $Z = p/\dot{\rho}$. Leid de uitdrukking voor Z als funktie van evenwichtsdichtheid ρ_o en geluidssnelheid c af.
7. Leid de uitdrukking voor het energietransport per oppervlakte-eenheid als funktie van p_m en Z af.

Wanneer geldt $p_m = 2$ newton/m^2, heeft men te doen met een sterke geluidsgolf. Bereken voor dat geval de maximale amplituden van de uitwijking $\bar{\rho}$ en de snelheid $\dot{\bar{\rho}}$. Bereken ook hoeveel de temperatuur in het centrum van een verdichting afwijkt van de kamertemperatuur.

Gegeven: $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.40$ voor lucht;

geluidfrequentie $\nu = 1000\ s^{-1}$;
dichtheid van lucht $\rho_o = 1{,}28\ kg/m^3$;
luchtdruk $P_o = 10^5$ newton/m^2.

14. a. Hoe groot is de reflectie-coëfficient voor geluidsgolven bij een lucht (1) - water (2) grensvlak bij loodrechte inval? $B_{H_2O} = 2{,}2.10^9 N/m^2$

b. Is er in dit geval een Brewsterhoek? Toon daartoe aan, dat

$$\cot g^2\theta_1 = \frac{Z_1^2}{Z_2^2 - Z_1^2} \frac{C_1^2 - C_2^2}{C_1^2}$$

en vind de voorwaarde(n), dat θ_1 reëel is.

15. Coaxiaal-kabels kunnen gemaakt zijn van koperdraad met een poly-ethyleen mantel, en daarom heen een koperen mantel. Gebruikelijke karakteristieke weerstanden zijn bij voorbeeld 50 en 90Ω. Een 50Ω kabel heeft een centrale geleider met een straal van 0,5 mm. De diëlectrische constante van poly-ethyleen is 2,3.
    a. Wat is de straal van de buitenmantel?
    b. Hoe groot zijn de capaciteit en de zelfinductie per meter?
    c. Hoe groot is de voortplantingssnelheid, uitgedrukt als percentage van de lichtsnelheid?

16. Een bol met sinusvormige oscillerende straal a (amplitude $\rho_m << \lambda$) zendt sferische golven uit in een gas. De uitgaande drukgolf zij

$$p(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(kr-\omega t)}$$

    a. Leid de uitdrukking voor $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$ en voor Z(r) af.
    b. Geef uitdrukkingen voor de verplaatsing en de verplaatsingssnelheid, uitgedrukt in a en ρ_m.
    c. Wat is het momentane vermogen uitgezonden door de bol? (Interpreteer de twee termen)
    d. Beschouw het uitgezonden gemiddelde vermogen als een functie van $\frac{\lambda}{a}$.
    e. Welke conclusie volgt hieruit voor de frequentie-afhankelijkheid van het vermogen uitgezonden door conus-luidsprekers?

WERKCOLLEGE "TRILLINGEN, GOLVEN EN OPTICA" (October 1973)

17. Gegeven zijn twee golfvelden:

$$E = \hat{e}_x\, f(z - ct) + \hat{e}_y\, g(z - ct) + \hat{e}_z\, h(z - ct),$$

$$B = \hat{e}_x\, q(z - ct) + \hat{e}_y\, r(z - ct) + \hat{e}_z\, s(z - ct),$$

waar f, g, h, q, r, s willekeurige funkties zijn, onafhankelijk van x en y. Toon aan dat de Maxwell-vgln. vereisen dat geldt:

(i) $h = s = 0$

(ii) $f = cr$

(iii) $g = -cq$,

dwz. slechts twee van de zes funkties zijn willekeurig.

18a. Gegeven zijn een rechts- en een links-circulair gepolariseerde golf van gelijke amplitudes:

$$\begin{cases} E_x = A\cos\omega t, \\ E_y = A\sin\omega t, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} E_x = A\cos(\omega t - \phi), \\ E_y = -A\sin(\omega t - \phi). \end{cases}$$

Bereken het resultaat van de superpositie van deze twee golven.
Kan elke lineair gepolariseerde golf worden voorgesteld als de superpositie van twee circulair gepolariseerde golven?

b. Gegeven zijn twee lineair gepolariseerde golven die in fase zijn, maar die verschillende amplitudes hebben en waarvan de $\vec{E}$-vectoren in verschillende richtingen wijzen:

$$\begin{cases} E_x^{(1)} = A\cos\omega t, \\ E_y^{(1)} = B\cos\omega t, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} E_x^{(2)} = A'\cos\omega t, \\ E_y^{(2)} = B'\cos\omega t. \end{cases}$$

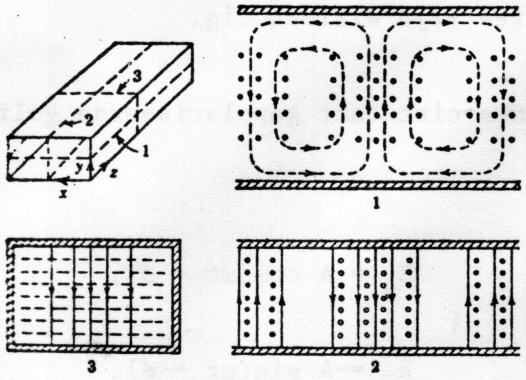
Bereken het resultaat van de superpositie van deze twee golven.

c. Toon aan dat een elliptisch gepolariseerde golf kan worden voorgesteld als de superpositie van een circulair gepolariseerde golf en een lineair gepolariseerde golf.

d. Vergelijk in de gevallen a, b, c de totale gemiddelde intensiteit van de golf met de som van de gemiddelde intensiteiten van de componenten.

19. Bereken de amplitudes van E en B op 2 m afstand van een Natrium lamp van 20 W in de onderstelling, dat de lamp alle energie als lineair gepolariseerde harmonische golven uitzendt, isotroop in alle richtingen. Hoe groot is daar de gemiddelde energiedichtheid?

20. De voortplanting van e.m. golven binnen een gesloten geleider gaat niet met vlakke golven, maar met een ingewikkeld veldpatroon (mode).
Als voorbeeld kiezen we een metalen pijp met rechthoekige doorsnede, waar men transmissie kan vinden als:



$$E_x = E_z = B_y = 0$$

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \exp i(\omega t - kz)$$

$$B_x = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} \exp i(\omega t - kz)$$

$$B_z = A_2 \cos\frac{\pi x}{a} \exp i(\omega t - kz)$$

a) Bepaal A_1 en A_2 door toepassing van de Maxwell-vergelijkingen in vacuum. (N.B. A_1 en A_2 kunnen complex zijn)

b) Bereken de fasesnelheid v_f en groepssnelheid v_g voor dit veld, dat zich langs de z-as voortplant.

c) Geef posities aan binnen de pijp, waar het B- veld circulair gepolariseerd is.

d) Bepaal het gemiddelde vermogen P van deze mode door integratie van de Pointing-vector.

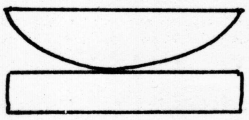
e) Bereken de gemiddelde energieinhoud U van een pijp met lengte $\Delta Z = 1$.

f) Bepaal uit d) en e) de "snelheid van energietransport" v_E, gedefinieerd door : $P \equiv v_E U$
Vergelijk v_E met v_f en v_g.

WERKCOLLEGE TRILLINGEN, GOLVEN EN OPTICA

Oktober 1973.

21. Een (oneindig) optisch transmissierooster heeft een transmissiefunctie gegeven door: $f(x) = \sin^2 px$. Bereken het interferentiepatroon.
Hoe is de intensiteitsverhouding der orde's bij loodrecht invallende straling?

22. 
Leid de plaats van de Newton-ringen (het best in reflectie te zien) af bij gebruik van een vlak en een bolvormig oppervlak. Hoeveel ringen zijn (in wit licht) te zien? Is in reflectie het centrum donker of licht?

23. Een radio-interferometer bestaat uit 32 antenne's op een rij met 7m tussenafstand. De golflengte van de gedetecteerde straling is 21 cm (waterstof-emissielijn). Wat is de angulaire breedte van het centrale maximum? en de angulaire afstand tussen twee hoofdmaxima?

24. Op 5 m van een incoherente lichtbron van 1 mm^2 staat een diafragma van 1 mm doorsnee. Wordt het diafragma coherent verlicht? Beantwoordt het buigingspatroon op een scherm achter het diafragma aan de Fraunhofer- of aan de Fresnel-beschrijving als dat scherm op 10 cm, 50 cm en 5 m van het diafragma staat? λ = 600 nm.